

## **PERMÜTASYON, KOMBİNASYON, BİNOM, OLASILIK (ÖZEL)**

### **ÖRNEK - 1**

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} kümesinin elemanlarıyla  $a > b > c$  şartını sağlayan kaç farklı üç basamaklı abc sayısı vardır?

- A) 20      B) 30      C) 35      D) 60      E) 90



Örneğin,

321 , 643 , 721 gibi

Bulduğunuz sayıların adedi 7 elemanlı kümeyiin 3 elemanlı alt kümeye sayısına eşittir. Çünkü  $a > b > c$  şartını sağlayan sayılar sorulduğundan 321 yazılmış 123 yazılamamaktadır. Yani kümeden  $a > b > c$  şeklinde hangi üç tane elemanı alırsınız alın, alacağınız rakamlardan  $a > b > c$  şartını sağlayan 1 tane abc yazılacaktır.

O halde 7 elemanlı kümeyiin 3 elemanlı alt kümeye sayısı  $\binom{7}{3} = 35$  bulunur.

**Cevap : C**

### **ÖRNEK - 2**

$a > b > c > d$  şartını sağlayan kaç farklı dört basamaklı abcd sayısı vardır?

- A) 120      B) 180      C) 200      D) 210      E) 300



Örneğin,

3210 , 6521 gibi

Yani {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} rakamlarından herhangi dört tanesi ile birer sayı oluştur. Bu durumda

$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$  bulunur.

**Cevap : D**

### **ÖRNEK - 3**

$a < b < c$  şartını sağlayan kaç farklı üç basamaklı abc sayısı vardır?

- A) 84      B) 100      C) 120      D) 160      E) 210



Örneğin,

237 , 168 gibi

Dikkat edildiğinde 0 in kullanılamayacağını görebiliriz. Yani {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} rakamlarından herhangi üç tanesi ile birer sayı oluştur. Bu durumda

$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$  bulunur.

**Cevap : A**

## ÖRNEK - 4

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  kümesinin elemanlarıyla  $a \leq b$  olacak şekilde kaç farklı iki basamaklı ab sayısı vardır?

- A) 36      B) 40      C) 45      D) 56      E) 60



$$\frac{1}{(1)} \frac{\binom{9}{1}}{\binom{1}{1}} + \frac{1}{(2)} \frac{\binom{9-1}{1}}{\binom{2}{1}} + \frac{1}{(3)} \frac{\binom{9-2}{1}}{\binom{3}{1}} + \dots + \frac{1}{(9)} \frac{\binom{1}{1}}{\binom{9}{1}} = \binom{9}{1} + \binom{8}{1} + \binom{7}{1} + \dots + \binom{1}{1}$$

$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 9 \end{array}$ 
         
  $\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ 9 \end{array}$ 
         
  $\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \vdots \\ 9 \end{array}$

$$\left. \begin{aligned} n > r \geq 0 \text{ olmak üzere,} \\ \binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \binom{n-2}{r} + \dots + \binom{r}{r} = \binom{n+1}{r+1} \end{aligned} \right\} \text{ olduğundan}$$

$$\binom{9}{1} + \binom{8}{1} + \binom{7}{1} + \dots + \binom{1}{1} = \binom{10}{2} = 45 \text{ bulunur.}$$

Cevap : C

\*  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  kümesinin elemanlarıyla

1.  $a < b$  olacak şekilde  $\binom{9}{2}$  tane iki basamaklı ab sayısı vardır.
2.  $a \leq b$  olacak şekilde  $\binom{9+1}{2}$  tane iki basamaklı ab sayısı vardır.

O halde  $a \leq b$  deki " = " lik kümənin eleman sayısını 1 artırmaktadır.

## ÖRNEK - 5

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  kümesinin elemanlarıyla  $a \leq b \leq c$  olacak şekilde kaç farklı üç basamaklı abc sayısı vardır?

- A) 120      B) 140      C) 156      D) 165      E) 180



$$\frac{1}{(1)} \underbrace{\binom{9+1}{2}}_{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \text{ rakamlarıyla } b \leq c \text{ olacak şekilde } \binom{9+1}{2} \text{ tane bc vardır.}} + \frac{1}{(2)} \underbrace{\binom{8+1}{2}}_{\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \text{ rakamlarıyla } b \leq c \text{ olacak şekilde } \binom{8+1}{2} \text{ tane bc vardır.}} + \frac{1}{(3)} \underbrace{\binom{7+1}{2}}_{\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \text{ rakamlarıyla } b \leq c \text{ olacak şekilde } \binom{7+1}{2} \text{ tane bc vardır.}} + \dots + \frac{1}{(9)} \underbrace{\binom{1+1}{2}}_{\{9\} \text{ rakamıyla } b \leq c \text{ olacak şekilde } \binom{1+1}{2} \text{ tane bc vardır.}}$$

$$\binom{10}{2} + \binom{9}{2} + \binom{8}{2} + \dots + \binom{2}{2} = \binom{10+1}{2+1} = \binom{11}{3} = 165 \text{ bulunur.}$$

Cevap : D

O halde,

\*  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  kümesinin elemanlarıyla

1.  $a \leq b$  olacak şekilde  $\binom{9+1}{2}$  tane iki basamaklı ab sayısı vardır.
2.  $a \leq b \leq c$  olacak şekilde  $\binom{9+2}{3}$  tane üç basamaklı abc sayısı vardır.
3.  $a \leq b \leq c < d \leq e$  olacak şekilde  $\binom{9+3}{5}$  tane beş basamaklı abcde sayısı yazılabilir. 9 + 3 almamızın sebebi üç kez eşitlik olduğu için kümenin eleman sayısını 3 artırmış olduk.

**ÖRNEK - 6**

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  kümesinin elemanlarıyla,

- a)  $a < b < c$  şartını sağlayan kaç farklı üç basamaklı abc sayısı vardır?
- b)  $a \leq b < c$  şartını sağlayan kaç farklı üç basamaklı abc sayısı vardır?
- c)  $a \leq b \leq c < d$  şartını sağlayan kaç farklı dört basamaklı abcd sayısı vardır?
- d)  $a > b > c > d \geq e$  şartını sağlayan kaç farklı beş basamaklı abcde sayısı vardır?



- a)  $a < b < c$  ifadesinde eşitlik geçmediğinden  $\binom{7}{3} = 35$  bulunur.
- b)  $a \leq b < c$  ifadesinde bir tane eşitlik geçtiğinden  $\binom{7+1}{3} = \binom{8}{3} = 56$  bulunur.
- c)  $a \leq b \leq c < d$  ifadesinde iki tane eşitlik geçtiğinden  $\binom{7+2}{4} = \binom{9}{4} = 126$  bulunur.
- d)  $a > b > c > d \geq e$  ifadesinde bir tane eşitlik geçtiğinden  $\binom{7+1}{5} = \binom{8}{5} = 56$  bulunur.

**ÖRNEK - 7**

$a < b \leq c$  şartını sağlayan kaç farklı üç basamaklı abc doğal sayısı vardır?

- A) 60      B) 84      C) 96      D) 120      E) 240



Sıfır rakamı kullanılmayacak. Çünkü a yerine 0 yazıldığında abc üç basamaklı olamaz.

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  elemanlarıyla  $a < b \leq c$  şartını sağlayan abc üç basamaklı sayıların adedi bulunurken bir tane eşitlik geçtiğinden  $\binom{9+1}{3} = \binom{10}{3} = 120$  bulunur.

**Cevap : D**

**ÖRNEK - 8**

$\{0, 1, 2\}$  kümesinin elemanlarıyla  $a \geq b$  şartını sağlayan kaç farklı iki basamaklı ab doğal sayısı vardır?

- A) 3      B) 5      C) 6      D) 9      E) 12



Sıfır rakamı kullanılabilir. Çünkü b yerine sıfır yazılabilir.  $\{0, 1, 2\}$  elemanlarıyla  $a \geq b$  eşitsizliğinde bir tane eşitlik geçtiğinden

$\binom{3+1}{2} = \binom{4}{2} = 6$  bulunur. Ama  $a \geq b$  şartını sağlayan 22, 21, 20, 11, 10, 00 şeklinde yazılabilecek ikililerden 00 ikilisi iki basamaklı sayı oluşturmadığından cevap  $6 - 1 = 5$  bulunur.

**Cevap : B**

**ÖRNEK - 9**

$a \geq b \geq c$  şartını sağlayan kaç farklı üç basamaklı abc doğal sayısı vardır?

- A) 120      B) 140      C) 165      D) 219      E) 220



Sıfır rakamı kullanılabilir. Çünkü c yerine sıfır yazılabilir.

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$      $a \geq b \geq c$     iki tane eşitlik geçtiğinden

$$\binom{10+2}{3} = \binom{12}{3} = 220 \text{ bulunur.}$$

$$\underbrace{\{999, 998, \dots, 100, 000\}}_{220 \text{ tane}}$$

$220 - 1 = 219$  bulunur.

**Cevap: D**

**ÖRNEK - 10**

$a \geq b \geq c$  şartını sağlayan 5 ile tam olarak bölünebilen kaç farklı üç basamaklı abc doğal sayısı vardır?

- A) 24      B) 45      C) 55      D) 60      E) 69



5 ile bölünebilme şartından dolayı c rakamı 0 veya 5 olabilir.

$c = 0$  için     $a \geq b \geq 0$  şartını sağlayan ab0 sayılarını bulalım.

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  küməsinin elemanlarıyla  $a \geq b$  şartını sağlayan ab iki basamaklı sayılarının adedi

$$\binom{10+1}{2} = \binom{11}{2} = 55$$

Bir tanesi 00 olduğundan dolayı  $55 - 1 = 54$  olur.

$c = 5$  için  $a \geq b \geq 5$  şartını sağlayan ab5 sayılarını bulalım.

$\{5, 6, 7, 8, 9\}$  küməsinin elemanlarıyla  $a \geq b$  şartını sağlayan ab iki basamaklı sayıların adedi

$$\binom{5+1}{2} = \binom{6}{2} = 15 \text{ olur.}$$

$54 + 15 = 69$  bulunur.

**Cevap: E**

## SAYMA KURALLARI

$N(C_1) \rightarrow C_1$  özelliğini sağlayan elemanların sayısı,

$N(C_1C_2) \rightarrow C_1$  ve  $C_2$  özelliklerini sağlayan elemanların sayısı,

$N(C_1C_2C_3) \rightarrow C_1, C_2$  ve  $C_3$  özelliklerini sağlayan elemanların sayısı,

.

$$S_0 = N$$

$$S_1 = N(C_1) + N(C_2) + N(C_3) + \dots$$

$$S_2 = N(C_1C_2) + N(C_1C_3) + \dots$$

$$S_3 = N(C_1C_2C_3) + N(C_1C_2C_4) + \dots$$

.

- \* Sadəcə 1 tane özelliği sağlayan elemanların sayısı

$$E_1 = \binom{1}{0} S_1 - \binom{2}{1} S_2 + \binom{3}{2} S_3 - \binom{4}{3} S_4 + \dots$$

- \* Sadəcə 2 tane özelliği sağlayan elemanların sayısı

$$E_2 = \binom{2}{0} S_2 - \binom{3}{1} S_3 + \binom{4}{2} S_4 - \binom{5}{3} S_5 + \dots$$

- \* Sadəcə 3 tane özelliği sağlayan elemanların sayısı

$$E_3 = \binom{3}{0} S_3 - \binom{4}{1} S_4 + \binom{5}{2} S_5 - \binom{6}{3} S_6 + \dots$$

.

- \* En az 1 tane özelliği sağlayan elemanların sayısı

$$L_1 = \binom{0}{0} S_1 - \binom{1}{0} S_2 + \binom{2}{0} S_3 - \binom{4}{0} S_4 + \dots$$

- \* En az 2 tane özelliği sağlayan elemanların sayısı

$$L_2 = \binom{1}{1} S_2 - \binom{2}{1} S_3 + \binom{3}{1} S_4 - \binom{4}{1} S_5 + \dots$$

- \* En az 3 tane özelliği sağlayan elemanların sayısı

$$L_3 = \binom{2}{2} S_3 - \binom{3}{2} S_4 + \binom{4}{2} S_5 - \binom{5}{2} S_6 + \dots$$

.

**ÖRNEK - 11**

50 den küçük pozitif tamsayılarından kaç tanesi,

- a) 2, 4, 6 ve 12 sayılarından en az birisi ile,
  - b) 2, 4, 6 ve 12 sayılarının sadece birisi ile,
  - c) 2, 4, 6 ve 12 sayılarının sadece ikisi ile,
  - d) 2, 4, 6 ve 12 sayılarının sadece üçü ile,
  - e) 2, 4, 6 ve 12 sayılarının sadece dördü ile,
  - f) 2, 4, 6 ve 12 sayılarının en az birisi ile,
  - g) 2, 4, 6 ve 12 sayılarının en az ikisi ile,
  - h) 2, 4, 6 ve 12 sayılarının en az üçü ile,
  - i) 2, 4, 6 ve 12 sayılarının en az dördü ile,
- tam olarak bölünebilir.



Tüm sayılar = {1, 2, ..... , 49}  $\Rightarrow$  49 tane

2 ile tam olarak bölünebilen sayıların adedi =  $N(C_1) = 24$

4 ile tam olarak bölünebilen sayıların adedi =  $N(C_2) = 12$

6 ile tam olarak bölünebilen sayıların adedi =  $N(C_3) = 8$

12 ile tam olarak bölünebilen sayıların adedi =  $N(C_4) = 4$

2 ve 4 ile tam olarak bölünebilen sayıların adedi =  $N(C_1C_2) = 12$

2 ve 6 ile tam olarak bölünebilen sayıların adedi =  $N(C_1C_3) = 8$

2 ve 12 ile tam olarak bölünebilen sayıların adedi =  $N(C_1C_4) = 4$

4 ve 6 ile tam olarak bölünebilen sayıların adedi =  $N(C_2C_3) = 4$

4 ve 12 ile tam olarak bölünebilen sayıların adedi =  $N(C_2C_4) = 4$

6 ve 12 ile tam olarak bölünebilen sayıların adedi =  $N(C_3C_4) = 4$

2, 4 ve 6 ile tam olarak bölünebilen sayıların adedi =  $N(C_1C_2C_3) = 4$

2, 4 ve 12 ile tam olarak bölünebilen sayıların adedi =  $N(C_1C_2C_4) = 4$

2, 6 ve 12 ile tam olarak bölünebilen sayıların adedi =  $N(C_1C_3C_4) = 4$

4, 6 ve 12 ile tam olarak bölünebilen sayıların adedi =  $N(C_2C_3C_4) = 4$

2, 4, 6 ve 12 ile tam olarak bölünebilen sayıların adedi =  $N(C_1C_2C_3C_4) = 4$

$S_0 = N =$  Sayıların tamamı 49 tane

$$S_1 = N(C_1) + N(C_2) + N(C_3) + N(C_4) = 24 + 12 + 8 + 4 = 48$$

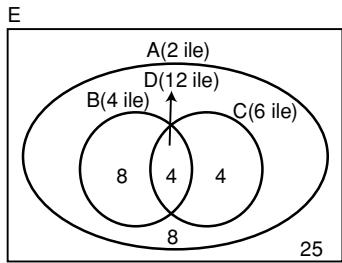
$$S_2 = N(C_1C_2) + N(C_1C_3) + N(C_1C_4) + N(C_2C_3) + N(C_2C_4) + N(C_3C_4) = 12 + 8 + 4 + 4 + 4 + 4 = 36$$

$$S_3 = N(C_1C_2C_3) + N(C_1C_2C_4) + N(C_1C_3C_4) + N(C_2C_3C_4) = 4 + 4 + 4 + 4 = 16$$

$$S_4 = N(C_1C_2C_3C_4) = 4$$

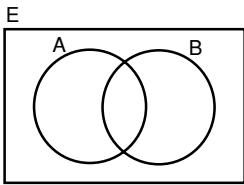
- a)  $S_1 - S_2 + S_3 - S_4 = 48 - 36 + 16 - 4 = 24$
- b)  $E_1 = \binom{1}{0}S_1 - \binom{2}{1}S_2 + \binom{3}{2}S_3 - \binom{4}{3}S_4 = 48 - 72 + 48 - 16 = 8$
- c)  $E_2 = \binom{2}{0}S_2 - \binom{3}{1}S_3 + \binom{4}{2}S_4 = 36 - 48 + 24 = 12$
- d)  $E_3 = \binom{3}{0}S_3 - \binom{4}{1}S_4 = 16 - 16 = 0$
- e)  $E_4 = \binom{4}{0}S_4 = 4$
- f)  $L_1 = \binom{0}{0}S_1 - \binom{1}{0}S_2 + \binom{3}{0}S_3 - \binom{4}{0}S_4 = 48 - 36 + 16 - 4 = 24$
- g)  $L_2 = \binom{1}{1}S_2 - \binom{2}{1}S_3 + \binom{3}{1}S_4 = 36 - 32 + 12 = 16$
- h)  $L_3 = \binom{2}{2}S_3 - \binom{3}{2}S_4 = 16 - 12 = 4$
- i)  $L_4 = \binom{3}{3}S_4 = 4$

Çözümü aşağıdaki şekil üzerinden de görelim.



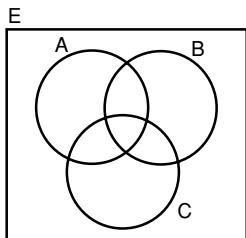
2 ile bölünebilən sayıların bulunduğu kümə A küməsi  
4 ile bölünebilən sayıların bulunduğu kümə B küməsi  
6 ile bölünebilən sayıların bulunduğu kümə C küməsi  
12 ile bölünebilən sayıların bulunduğu kümə D küməsi  
Sayıların tamamının olduğu kümə  $\{1, 2, 3, \dots, 48, 49\}$   
E evrensel küməsi

### Düzensizlik



$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} s(\overline{A \cup B}) &= s(E) - s(A \cup B) = s(E) - [s(A) + s(B) - s(A \cap B)] \\ &= s(E) - s(A) - s(B) + s(A \cap B) \\ &= \underbrace{s(E)}_{S_0} - \underbrace{[s(A) + s(B)]}_{S_1} + \underbrace{s(A \cap B)}_{S_2} \\ &= S_0 - S_1 + S_2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 s(A \cup B \cup C) &= s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C) \\
 s(\overline{A \cup B \cup C}) &= s(E) - s(A \cup B \cup C) \\
 &= s(E) - s(A) - s(B) - s(C) + s(A \cap B) + s(A \cap C) + s(B \cap C) - s(A \cap B \cap C) \\
 &= \underbrace{s(E)}_{S_0} - \underbrace{[s(A) + s(B) + s(C)]}_{S_1} + \underbrace{[s(A \cap B) + s(A \cap C) + s(B \cap C)]}_{S_2} - \underbrace{s(A \cap B \cap C)}_{S_3} \\
 &= S_0 - S_1 + S_2 - S_3 \\
 s(\overline{A \cup B \cup C \cup D}) &= \underbrace{s(E)}_{S_0} - \underbrace{[s(A) + s(B) + s(C) + s(D)]}_{S_1} + \underbrace{[s(A \cap B) + s(A \cap C) + s(A \cap D) + s(B \cap C) + s(B \cap D) + s(C \cap D)]}_{S_2} \\
 &\quad - \underbrace{[s(A \cap B \cap C) + s(A \cap B \cap D) + s(A \cap C \cap D) + s(B \cap C \cap D)]}_{S_3} + \underbrace{s(A \cap B \cap C \cap D)}_{S_4} \\
 &= S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4
 \end{aligned}$$

5 tane olaydaki düzensizlik  $S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5$  şeklindedir.

### ÖRNEK - 12

50 den küçük doğal sayılarından kaç tanesi 2, 4, 6 ve 12 nin herhangi birisi ile tam olarak bölünmez?



Bu soru bir düzensizlik sorusudur. Bir önceki sorudan elde ettiğimiz veriler kullanılırsa,

$$S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = 49 - 48 + 36 - 16 + 4 = 25 \text{ şeklinde bulunur.}$$

**ÖRNEK - 13**

1 den 100 e kadar olan doğal sayılarından kaç tanesi 3 veya 5 ile tam olarak bölünemez?

- A) 45      B) 53      C) 56      D) 60      E) 63



Bu bir düzensizlik sorusudur.

$S_0 - S_1 + S_2$  sorulmaktadır.

Sayıların tamamı = {1, 2, 3, ..., 100}

$$S_0 = 100$$

3 ile tam olarak bölünen sayılar =  $\underbrace{\{3, 6, 9, \dots, 99\}}_{33 \text{ tane}}$

5 ile tam olarak bölünen sayılar =  $\underbrace{\{5, 10, 15, \dots, 95, 100\}}_{20 \text{ tane}}$

$$S_1 = 33 + 20 = 53$$

3 ve 5 ile tam olarak bölünen sayılar =  $\underbrace{\{15, 30, 45, 60, 75, 90\}}_{6 \text{ tane}}$

$$S_2 = 6$$

$$S_0 - S_1 + S_2 = 100 - 53 + 6 = 53 \text{ bulunur.}$$

**Cevap : B**

**ÖRNEK - 14**

1 den 60 a kadar olan doğal sayılarından kaç tanesi 3,4 veya 5 sayılarından herhangi birisi ile tam olarak bölünemez?

- A) 12      B) 15      C) 18      D) 24      E) 30



$S_0 - S_1 + S_2 - S_3$  sorulmaktadır.

Sayıların tamamı = {1, 2, 3, ..., 60}  $\rightarrow S_0 = 60$

3 ile tam olarak bölünebilen sayılar = {3, 6, 9, ..., 60}  $\rightarrow 20$  tane

4 ile tam olarak bölünebilen sayılar = {4, 8, 12, ..., 60}  $\rightarrow 15$  tane

5 ile tam olarak bölünebilen sayılar = {5, 10, ..., 60}  $\rightarrow 12$  tane

$$S_1 = 20 + 15 + 12 = 47$$

3 ve 4 ile tam olarak bölünebilen sayılar = {12, 24, 36, 48, 60}  $\rightarrow 5$  tane

3 ve 5 ile tam olarak bölünebilen sayılar = {15, 30, 45, 60}  $\rightarrow 4$  tane

4 ve 5 ile tam olarak bölünebilen sayılar = {20, 40, 60}  $\rightarrow 3$  tane

$$S_2 = 5 + 4 + 3 = 12$$

3, 4 ve 5 ile tam olarak bölünebilen sayılar = {60}  $\rightarrow 1$  tane

$$S_3 = 1$$

$$S_0 - S_1 + S_2 - S_3 = 60 - 47 + 12 - 1 = 24$$

**Cevap : D**

**ÖRNEK - 15**

4 kişi cep telefonlarını masaya bırakıyorlar. Daha sonra herbiri masadan birer tane cep telefonunu rast gele alıyor.

**Buna göre, bu kişilerden hiçbirinin kendi telefonunu almadığı kaç farklı durum vardır?**

- A) 6      B) 8      C) 9      D) 12      E) 15



**I. yol**

Bu bir düzensizlik sorusudur.

4 kişi rastgele masadaki telefonlardan birer tanesini  $S_0 = 4!$  farklı şekilde alabilir.

4 kişiden herhangi birisinin kendi telefonunu aldığı diğerlerinin ise rastgele aldığı  $S_1 = \binom{4}{1} \cdot 3!$  farklı durum vardır.

4 kişiden herhangi ikisinin kendi telefonunu aldığı diğerlerinin ise rastgele aldığı  $S_2 = \binom{4}{2} \cdot 2!$  farklı durum vardır.

4 kişiden herhangi üçünün kendi telefonunu aldığı diğerlerinin ise rastgele aldığı  $S_3 = \binom{4}{3} \cdot 1!$  farklı durum vardır.

4 kişiden tamamının kendi telefonunu aldığı  $S_4 = \binom{4}{4} \cdot 0!$  diğerlerinin ise rastgele aldığı

$$S_0 - S_1 + S_2 - S_3 = 4! - \binom{4}{1} \cdot 3! + \binom{4}{2} \cdot 2! - \binom{4}{3} \cdot 1! + \binom{4}{4} \cdot 0! = 24 - 24 + 12 - 4 + 1 = 9 \text{ bulunur.}$$

**II. yol**

Düzensizlik aşağıdaki şekilde de bulunabilir.

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  maclaurin serisinde  $x = -1$  alındığında

$$\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} + \cdots = \frac{1}{e}$$

Yukarıdaki soruda 4 kişi olduklarıdan kesirlerden  $\frac{1}{4!}$  e kadar olan kısmının sonucunu bulup 4! ile çarpacağız.

$$4! \left( \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right) = 4! \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right]_{(12)(4)}$$

$$= 24 \cdot \frac{9}{24} = 9 \text{ bulunur.}$$

**Cevap : C**

**ÖRNEK - 16**

**SEZAİ** kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek oluşturulan beş harfli anlamlı ya da anlamsız kelimelerin kaç tanesinde harflerin her biri önceki bulundukları sıradan farklı bir sırada bulunur?

- A) 20      B) 24      C) 36      D) 38      E) 44



**I. yol**

Düzensizlik sorulmaktadır.

5 harf  $S_0 = 5!$  farklı şekilde sıralanır.

1 harf kendi sırasında diğerleri rastgele  $S_1 = \binom{5}{1} \cdot 4!$  farklı şekilde sıralanır.

2 harf kendi sırasında diğerleri rastgele  $S_2 = \binom{5}{2} \cdot 3!$  farklı şekilde sıralanır.

3 harf kendi sırasında diğerleri rastgele  $S_3 = \binom{5}{3} \cdot 2!$  farklı şekilde sıralanır.

4 harf kendi sırasında diğerleri rastgele  $S_4 = \binom{5}{4} \cdot 1!$  farklı şekilde sıralanır.

5 harf kendi sırasında  $S_5 = 1$  farklı şekilde sıralanır.

$$S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5 = 5! - \binom{5}{1} \cdot 4! + \binom{5}{2} \cdot 3! - \binom{5}{3} \cdot 2! + \binom{5}{4} \cdot 1! - 1 = 120 - 120 + 60 - 20 + 5 - 1 = 44 \text{ bulunur.}$$

**II. yol**

$$5! \cdot \left[ \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right] = 5! \cdot \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} \right] = 120 \cdot \frac{44}{120} = 44 \text{ bulunur.}$$

**Cevap : E**

**ÖRNEK - 17**

4 kişinin her biri 4 farklı kitaptan ikişer tanesini okuyacaktır. Okuma işi birinci ay bir kitap ve ikinci ay başka bir kitap şeklinde yapılacaktır.

**Kitapların okunma sırası göz önüne alınmadan 4 kişi 4 kitaptan ikişer tanesini kaç farklı şekilde seçebilir?**

- A) 180      B) 216      C) 280      D) 320      E) 364



1. ay 4 kişi arasında  $4! = 24$  farklı şekilde kitap seçimi olabilir.

2. ay ise herkes kendi okuduğu kitap haricindeki kitabı seçecektir. Yani sorunun bu kısmı düzensizlik sorusudur. 4 kişinin kitap seçimindeki düzensizlik sayısı

$$4! \left[ \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right] = 24 \cdot \frac{9}{24} = 9$$

1. ayda 24 farklı kitap seçimi, 2. ayda 9 farklı kitap seçimi olduğundan iki ayda  $24 \cdot 9 = 216$  farklı kitap seçimi olabilir.

**Cevap : B**

**ÖRNEK - 18**

Ahmet numaraları 1, 2, 3, 4, 5, 6 olan altı arabanın katıldığı bir yarışta tahminde bulunacaktır. Tahmin, arabaların herbirinin hangi sırada olduğunu bulmaktadır. Ahmet, 1 nolu arabanın birinci, 2 nolu arabanın ikinci, 3 nolu arabanın üçüncü, 4 nolu arabanın dördüncü, 5 nolu arabanın beşinci, 6 nolu arabanın altıncı olacağı üzerinde tahminde bulunmuştur.

**Buna göre, Ahmet'in tahminlerinin altısının da tutmama olasılığı ve altısının da tutmadığı kaç tane durum sayısının olduğunu bulalım.**



$$\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{360 - 120 + 30 - 6 + 1}{720} = \frac{265}{720} = \frac{53}{144}$$

Tahminlerin altısının da tutmama olasılığı  $\frac{53}{144}$  bulunur.

Tahminlerin altısının da tutmadığı  $6! \cdot \frac{53}{144} = 720 \cdot \frac{53}{144} = 265$  farklı durum vardır.

**ÖRNEK - 19**

**3 evli çift bir sırada yanyana oturacaktır. Buna göre,**

- a) Hiçbir eşin yanyana olmaması koşuluyla
- b) Sadece bir eşin yanyana olması koşuluyla
- c) En az bir eşin yanyana olması koşuluyla

**kaç farklı şekilde oturabilirler?**



3 evli çift yani 6 kişi bir sıraya  $S_0 = 6! = 720$  farklı şekilde oturabilir.

1 evli çift yanyana diğerleri rastgele  $S_1 = \binom{3}{1} \cdot 5! \cdot 2! = 720$  farklı şekilde oturabilir.

2 evli çift yanyana diğerleri rastgele  $S_2 = \binom{3}{2} \cdot 4! \cdot 2! \cdot 2! = 288$  farklı şekilde oturabilir.

3 evli çift yanyana  $S_3 = \binom{3}{3} \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! = 48$  farklı şekilde oturabilir.

- a) Düzensizlik sorulmaktadır.

$$S_0 - S_1 + S_2 - S_3 = 720 - 720 + 288 - 48 = 240$$

$$b) E_1 = \binom{1}{0} S_1 - \binom{2}{1} S_2 + \binom{3}{2} S_3 = 720 - 576 + 144 = 288$$

$$c) L_1 = \binom{0}{0} S_1 - \binom{1}{0} S_2 + \binom{2}{0} S_3 = 720 - 288 + 48 = 480$$

**ÖRNEK - 20**

5 kişi bir eve girerken ceketlerini rastgele askılığa asıyor. Daha sonra evden çıkışken herkes askılıktan rastgele birer ceket alıyor.

- a) Hiçbirinin kendi ceketini almamış olması
  - b) Sadece iki tanesinin kendi ceketini almış olması
  - c) En az üçünün kendi ceketini almış olması
- kaç farklı durumda gerçekleşir?**



5 kişi ceketlerini  $S_0 = 5! = 120$  farklı şekilde alabilir.

1 kişi kendi ceketini alıp diğerleri rastgele  $S_1 = \binom{5}{1} \cdot 4! = 120$  farklı şekilde alabilir.

2 kişi kendi ceketini alıp diğerleri rastgele  $S_2 = \binom{5}{2} \cdot 3! = 60$  farklı şekilde alabilir.

3 kişi kendi ceketini alıp diğerleri rastgele  $S_3 = \binom{5}{3} \cdot 2! = 20$  farklı şekilde alabilir.

4 kişi kendi ceketini alıp diğerleri rastgele  $S_4 = \binom{5}{4} \cdot 1! = 5$  farklı şekilde alabilir.

5 kişi kendi ceketini  $S_5 = 1$  farklı şekilde alabilir.

- a) Düzensizlik sorulmaktadır.

**I. yol:**

$$S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5 = 120 - 120 + 60 - 20 + 5 - 1 = 44$$

**II. yol:**

$$5! \left( \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right) = 44$$

$$b) E_2 = \binom{2}{0} S_2 - \binom{3}{1} S_3 + \binom{4}{2} S_4 - \binom{5}{3} S_5 = 60 - 60 + 30 - 10 = 20$$

$$c) L_3 = \binom{2}{2} S_3 - \binom{3}{2} S_4 + \binom{4}{2} S_5 = 20 - 15 + 6 = 11$$

**ÖRNEK - 21**

BEBEK MAMASI kelimelerinin harfleri

- a) Aynı harflerin yanyana gelmemesi koşuluyla
- b) Sadece iki çift aynı harf yanyana gelmesi koşuluyla
- c) En az iki çift aynı harf yanyana gelmesi koşuluyla

**kaç farklı şekilde sıralanırlar?**



Harfleri gruplayalım.

(BB), (EE), (MM), (AA), K, S, I

$$S_0 = \frac{11!}{(2!)^4}$$

Bir çift aynı harf yanyana diğerleri rastgele,  $S_1 = \binom{4}{1} \cdot \frac{10!}{(2!)^3}$  farklı şekilde sıralanır.

İki çift aynı harf yanyana diğerleri rastgele,  $S_2 = \binom{4}{2} \cdot \frac{9!}{(2!)^2}$  farklı şekilde sıralanır.

Üç çift aynı harf yanyana diğerleri rastgele,  $S_3 = \binom{4}{3} \cdot \frac{8!}{2!}$  farklı şekilde sıralanır.

Dört çift aynı harf yanyana diğerleri rastgele,  $S_4 = 7!$

a) Düzensizlik sorulmaktadır.

$$S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = \frac{11!}{(2!)^4} - \binom{4}{1} \frac{10!}{(2!)^3} + \binom{4}{2} \frac{9!}{(2!)^2} - \binom{4}{3} \frac{8!}{2!} + 7!$$

$$b) E_2 = \binom{2}{0} S_2 - \binom{3}{1} S_3 + \binom{4}{2} S_4 = \binom{2}{0} \cdot \binom{4}{2} \cdot \frac{9!}{(2!)^2} - \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{3} \cdot \frac{8!}{2!} + \binom{4}{2} \cdot 7!$$

$$c) L_2 = \binom{1}{1} S_2 - \binom{2}{1} S_3 + \binom{3}{2} S_4 = \binom{1}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \frac{9!}{(2!)^2} - \binom{2}{1} \cdot \binom{4}{3} \cdot \frac{8!}{2!} + \binom{3}{2} \cdot 7!$$

### ÖRNEK - 22

$s(A) = 8$ ,  $s(B) = 5$  olduğuna göre A dan B ye kaç farklı

- a) Örten fonksiyon tanımlanabilir?
- b) Görüntü kümesinde sadece 3 eleman olan fonksiyon tanımlanabilir?
- c) Görüntü kümesinde en fazla 3 eleman olan fonksiyon tanımlanabilir?



A kümesindeki elemanlar

B kümesindeki elemanlarla  $S_0 = 5^8$  farklı şekilde eşleşebilir.

B kümesindeki 1 eleman açıkta kalıp diğerleriyle  $S_1 = \binom{5}{1} \cdot 4^8$  farklı şekilde eşleşebilir.

B kümesindeki 2 eleman açıkta kalıp diğerleriyle  $S_2 = \binom{5}{2} \cdot 3^8$  farklı şekilde eşleşebilir.

B kümesindeki 3 eleman açıkta kalıp diğerleriyle  $S_3 = \binom{5}{3} \cdot 2^8$  farklı şekilde eşleşebilir.

B kümesindeki 4 eleman açıkta kalıp diğerleriyle  $S_4 = \binom{5}{4} \cdot 1^8$  farklı şekilde eşleşebilir.

a)  $S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = 5^8 - \binom{5}{1} \cdot 4^8 + \binom{5}{2} \cdot 3^8 - \binom{5}{3} \cdot 2^8 + \binom{5}{4} \cdot 1^8$

b) Görüntü kümesinde 3 eleman olması B kümesinde sadece 2 elemanın açıkta kalması demektir. Değer kümesini de sadece 2 elemanlı açıkta kalması istendiğinden  $E_2$  sorulmaktadır.

**I. yol**

$$E_2 = \binom{2}{0} \cdot S_2 - \binom{3}{1} \cdot S_3 + \binom{4}{2} \cdot S_4 = \binom{2}{0} \cdot \binom{5}{2} \cdot 3^8 - \binom{3}{1} \cdot \binom{5}{3} \cdot 2^8 + \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{4} \cdot 1^8$$

**II. yol**

$E_2$  bulunurken B kümesinden 2 eleman açıkta kalacak yani sadece 3 eleman kullanılacak. B kümesinden 3 eleman  $\binom{7}{3}$  farklı şekilde seçilir. Daha sonra bu 3 elemanın tamamı kullanılır. Yani A kümesinden 3 elemanlı kümeye örten fonksiyon sayısı bulunur. 10 elemanlı bir kümeden 3 elemanlı bir kümeye örten fonksiyon sayısı

$$3^{10} - \binom{3}{1} \cdot 2^{10} + \binom{3}{2} \cdot 1^{10} \text{ olur. Bu durumda } \binom{7}{3} \left[ 3^{10} - \binom{3}{1} \cdot 2^{10} + \binom{3}{2} \cdot 1^{10} \right] \text{ bulunur.}$$

c) Görüntü kümesinde en fazla 3 eleman olması B kümesinde en az 2 elemanın açıkta kalması demektir. Değer kümesinde en az 2 elemanın açıkta kalması istendiğinden  $L_2$  sorulmaktadır.

$$L_2 = \binom{1}{1} \cdot S_2 - \binom{2}{1} \cdot S_3 + \binom{4}{1} \cdot S_4 = \binom{1}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot 3^8 - \binom{2}{1} \cdot \binom{5}{3} \cdot 2^8 + \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{4} \cdot 1^8$$

**ÖRNEK - 23**

3 özdeş matematik, 3 özdeş fizik, 3 özdeş kimya kitabı aynı branştan kitapların üç tanesi yanyana gelmemesi koşuluyla bir rafa kaç farklı şekilde dizilir?

- A) 960      B) 1200      C) 1314      D) 1453      E) 1856



9 kitap  $S_0 = \frac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 3!}$  farklı şekilde rafa dizilir.

Matematik, Fizik ya da Kimya kitaplarından herhangi bir branştaki kitaplar yanyana diğerleri rastgеле,

$$\begin{array}{c} \boxed{\text{MMM}} \quad \boxed{\text{FFF}} \quad \boxed{\text{KKK}} \\ 1 \end{array}$$

$$S_1 = \binom{3}{1} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 3!} \text{ farklı şekilde dizilir.}$$

Herhangi iki branştaki kitaplar yanyana diğerleri rastgеле;

$$\begin{array}{c} \boxed{\text{MMM}} \quad \boxed{\text{FFF}} \quad \boxed{\text{KKK}} \\ 1 \quad 1 \end{array}$$

$$S_2 = \binom{3}{2} \cdot \frac{5!}{3!} \text{ farklı şekilde dizilir.}$$

Üç branştaki kitaplar yanyana

$$\begin{array}{c} \boxed{\text{MMM}} \quad \boxed{\text{FFF}} \quad \boxed{\text{KKK}} \\ 1 \qquad \qquad \qquad 1 \qquad \qquad \qquad 1 \end{array}$$

$S_3 = 3!$  farklı şekilde dizilir.

$$S_0 - S_1 + S_2 - S_3$$

$$= \frac{9!}{3!.3!.3!} - \binom{3}{1} \frac{7!}{3!.3!} + \binom{3}{2} \cdot \frac{5!}{3!} - 3!$$

$$= 1680 - 420 + 60 - 6 = 1314 \text{ bulunur.}$$

Cevap : C

#### ÖRNEK - 24

5 özdeş hediye 3 kişiye kaç farklı şekilde dağıtılabılır?

- A) 10      B) 15      C) 21      D) 35      E) 45



5 özdeş hediye  $\otimes$ ,  $\otimes$ ,  $\otimes$ ,  $\otimes$ ,  $\otimes$  şeklinde olsun. Bu hediyeleri 3 kişiye aşağıdaki şekilde bazı örnekleri verildiği üzere dağıtalım.

1. kişi	2. kişi	3. kişi	
$\otimes\otimes$	$\otimes\otimes$	$\otimes$	1. kişi 2 tane 2. kişi 2 tane 3. kişi 1 tane
$\otimes$	$\otimes\otimes\otimes$	$\otimes$	1. kişi 1 tane 2. kişi 3 tane 3. kişi 1 tane
$\otimes$	$\otimes\otimes$	$\otimes\otimes$	1. kişi 1 tane 2. kişi 2 tane 3. kişi 2 tane
$\otimes\otimes\otimes$		$\otimes\otimes$	1. kişi 3 tane 2. kişi 0 tane 3. kişi 2 tane
	$\otimes\otimes$	$\otimes\otimes\otimes$	1. kişi 0 tane 2. kişi 2 tane 3. kişi 3 tane

Yukarıda görüleceği üzere 5 özdeş hediyeyi 3 kişiye dağıtırken iki tane | ve beş tane  $\otimes$  karakterinin yer değişim sayısını bulunmalıdır.

$\otimes, \otimes, \otimes, \otimes, \otimes, |, |$  in yer değişim sayısını təkrarlı permütasyondan  $\frac{7!}{5!.2!} = 21$  şeklinde buluruz.

$\frac{7!}{5!.2!} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2}$  olduğundan bu çözümü formülleştirecek olursak

H tane özdeş hediye n kişiye

$\binom{H+n-1}{H}$  veya  $\binom{H+n-1}{n-1}$  farklı şekillerde dağıtilır.

Çözümü formülden yapacak olursak

H= özdeş hediye sayısı = 5

n = Kişi sayısı = 3

$\binom{H+n-1}{H} = \binom{5+3-1}{5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$  bulunur.

Cevap : C

**ÖRNEK - 25**

10 özdeş hediye 7 kişiye kaç farklı şekilde dağıtılabılır?

- A)  $\binom{17}{5}$       B)  $\binom{17}{6}$       C)  $\binom{17}{7}$   
 D)  $\binom{16}{7}$       E)  $\binom{16}{10}$



$$H = 10 \\ n = 7 \\ \binom{H+n-1}{H} = \binom{16}{10}$$

**Cevap : E**

**ÖRNEK - 26**

20 özdeş hediye, 4 kişiye her birine en az birer hediye verilmesi koşuluyla kaç farklı şekilde dağıtılabılır?

- A)  $\binom{20}{3}$       B)  $\binom{20}{10}$       C)  $\binom{19}{4}$   
 D)  $\binom{19}{10}$       E)  $\binom{19}{16}$



4 kişinin herbirine en az birer hediye verileceğinden 20 özdeş hediyenin 4 tanesi herbirine birer tane olacak şekilde dağıtılır. Daha sonra kalan 16 hediyesi 4 kişiye istediğimiz gibi dağıtabiliriz.

$$H = 16 \\ n = 4 \\ \binom{H+n-1}{H} = \binom{19}{16}$$

**Cevap : E**

**ÖRNEK - 27**

30 tane özdeş hediye 5 kişiden üçüne en az dörder, ikisine en az yedişer tane verilmesi koşuluyla beş kişiye kaç farklı şekilde dağıtolabilir?

- A) 70      B) 90      C) 120      D) 180      E) 210



5 kişiden üçüne en az dörder =  $4 + 4 + 4 = 12$  tane  
 ikisine en az yedişer =  $7 + 7 = 14$  tane  
 yani  $12 + 14 = 26$  tanesi dağıtıldıktan sonra geriye kalan  $30 - 26 = 4$  tanesini istediğimiz şekilde dağıtabiliriz.

$$H = 4 \\ n = 5 \\ \binom{H+n-1}{H} = \binom{8}{4} = 70 \text{ bulunur.}$$

**CEVAP : A**

**ÖRNEK - 28**

$a + b + c + d = 7$  olacak şekilde kaç farklı  $(a, b, c, d)$  doğal sayı sıralı dörtlüsü vardır?

- A) 60      B) 90      C) 120      D) 180      E) 240



$$H = 7 \\ n = 4 \\ \binom{H+n-1}{H} = \binom{10}{7} = 120$$

**Cevap : C**

**ÖRNEK - 29**

$a + b + c + d + e = 9$  olacak şekilde kaç farklı  $(a, b, c, d, e)$  pozitif tam sayı sıralı beşlisi vardır?

- A) 48      B) 60      C) 70      D) 96      E) 120



Pozitif tamsayı istendiğinden a, b, c, d ve e ye birer tane hediye verilip kalan  $9 - 5 = 4$  tane hediyesi istediğimiz şekilde dağıtabiliriz.

$$H = 4 \\ n = 5 \\ \binom{H+n-1}{H} = \binom{8}{4} = 70$$

**Cevap : C**

**ÖRNEK - 30**

$a > 3$ ,  $b \geq 5$ ,  $c > 1$  ve  $a + b + c = 15$  olacak şekilde kaç farklı  $(a, b, c)$  pozitif tam sayı sıralı üçlüsü bulunur?

- A) 15      B) 28      C) 36      D) 45      E) 54



$$a + b + c = 15$$

a ya 4, b ye 5, c ye 2 verildikten sonra

$15 - (4 + 5 + 2) = 4$  geriye kalan 4 taneyi dağıtalım.

$$H = 4$$

$$n = 3 \quad \binom{H+n-1}{H} = \binom{6}{4} = 15$$



$$a + b + c = 15 \text{ eşitliğinde}$$

$$a = x + 4, \quad x \in \mathbb{N}$$

$$b = y + 5, \quad y \in \mathbb{N}$$

$$c = z + 2, \quad z \in \mathbb{N}$$

$$a + b + c = 15$$

$$x + 4 + y + 5 + z + 2 = 15$$

$$x + y + z = 4$$

$$H = 4$$

$$n = 3$$

$$\binom{H+n-1}{H} = \binom{6}{4} = 15$$

**Cevap : A**

**ÖRNEK - 31**

$$a \geq 5, \quad b \geq -2, \quad c > 3$$

$a + b + c = 15$  olacak şekilde kaç farklı  $(a, b, c)$  tam sayı sıralı üçlüsü vardır?

- A) 30      B) 45      C) 60      D) 75      E) 90



$$a + b + c = 15 \text{ eşitliğinde}$$

$$a = x + 5, \quad x \in \mathbb{N}$$

$$b = y - 2, \quad y \in \mathbb{N}$$

$$c = z + 4, \quad z \in \mathbb{N} \text{ olsunlar}$$

$$a + b + c = 15$$

$$x + 5 + y - 2 + z + 4 = 15$$

$$x + y + z = 8$$

$$H = 8$$

$$n = 3 \quad \binom{H+n-1}{H} = \binom{10}{8} = 45 \text{ bulunur.}$$

**Cevap : B**

**ÖRNEK - 32**

$$x_i \geq 5 \text{ olacak şekilde}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 32 \quad \text{olan kaç farklı}$$

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  pozitif tam sayı sıralı beşlisi vardır?

- A) 60      B) 90      C) 180      D) 260      E) 330



$$x_1 = a + 5, \quad a \in \mathbb{N}$$

$$x_2 = b + 5, \quad b \in \mathbb{N}$$

$$x_3 = c + 5, \quad c \in \mathbb{N}$$

$$x_4 = d + 5, \quad d \in \mathbb{N}$$

$$x_5 = e + 5, \quad e \in \mathbb{N}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 32$$

$$a + b + c + d + e = 7$$

$$H = 7$$

$$n = 5 \quad \binom{H+n-1}{H} = \binom{11}{7} = 330 \text{ bulunur.}$$

**Cevap : E**

**ÖRNEK - 33**

$x_i < 5$  ve  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$  olan kaç farklı  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  doğal sayı sıralı dörtlüsü vardır?

- A) 35    B) 50    C) 60    D) 90    E) 120



12 özdeş hediye 4 kişiye  $S_0 = \binom{15}{12}$  farklı şekilde dağıtılmış. Sayılardan herhangi birisi 5 ya da 5 ten büyük olsun.

$$x_1 = 5 + a, a \in \mathbb{N}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

$$\downarrow$$

$$5 + a$$

$$a + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

7 özdeş hediye 4 kişiye  $\binom{10}{7}$  farklı şekilde dağıtılmış.

$$S_1 = \binom{4}{1} \cdot \binom{10}{7}$$

Sayılarından herhangi ikisi 5 ya da 5 ten büyük olsun.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 5 + a, a \in \mathbb{N} \\ x_2 = 5 + b, b \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \text{olsun.}$$

$$\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 5 + a \quad 5 + b \end{matrix}$$

$$a + b + x_3 + x_4 = 2$$

2 özdeş hediye 4 kişiye  $\binom{5}{2}$  farklı şekilde dağıtılmış.

$$S_2 = \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2}$$

$$\begin{aligned} S_0 - S_1 + S_2 &= \binom{15}{12} - \binom{4}{1} \cdot \binom{10}{7} + \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} \\ &= 455 - 480 + 60 = 35 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**Cevap : A**

**ÖRNEK - 34**

$3 \leq x_i \leq 6$  ve  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 21$ , olacak şekilde kaç farklı  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  tam sayı sıralı dörtlüsü vardır?

- A) 10    B) 20    C) 30    D) 60    E) 90



$$x_1 = a + 3, a \leq 3, a \in \mathbb{N}$$

$$x_2 = b + 3, b \leq 3, b \in \mathbb{N}$$

$$x_3 = c + 3, c \leq 3, c \in \mathbb{N}$$

$$x_4 = d + 3, d \leq 3, d \in \mathbb{N}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 21$$

$$a + b + c + d + 12 = 21$$

$$a + b + c + d = 9$$

$$a + b + c + d = 9, (a \leq 3, b \leq 3, c \leq 3, d \leq 3)$$

9 özdeş hediye 4 kişiye

$$S_0 = \binom{12}{9} \text{ farklı şekilde dağıtılmış.}$$

Dört farklı harften birisi  $a = x + 4, x \in \mathbb{N}$  olsun.

$$x + b + c + d = 5$$

$$S_1 = \binom{4}{1} \cdot \binom{8}{5}$$

Dört farklı harften ikisi

$$a = x + 4, x \in \mathbb{N}$$

$$b = y + 4, y \in \mathbb{N}$$

$$x + y + c + d = 1$$

$$S_2 = \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1}$$

$$S_0 - S_1 + S_2 = \binom{12}{9} - \binom{4}{1} \cdot \binom{8}{5} + \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1}$$

$$= 220 - 224 + 24 = 20 \text{ bulunur.}$$

**Cevap : B**

## PERMÜTASYON, KOMBİNASYON, BİNOM, OLASILIK (ÖZEL)

### ÖRNEK - 35

Fiyatları 30 lira, 40 lira, 50 lira veya 60 lira olan dört çeşit gömlekten yeterli sayıda bulunduğu bir mağazadan 400 liraya 10 tane gömlek alınacaktır.

**Bu gömleklerin herbir çeşidinden en az birer gömlek alınması koşuluyla kaç farklı seçim yapılabilir?**

- A) 24662      B) 36452      C) 54240  
 D) 60760      E) 72952



30, 40, 50, 60 ve 400 sayılarını 10 ile sadeleştirelim.  
 3, 4, 5, 6 ve 40 bulunur.

Bu durumda fiyatları 3 lira, 4 lira, 5 lira veya 6 lira olan gömleklerin herbirinden en az birer tane alacak kişi 40 lira parasıyla kaç gömlek alacağını bulacağız.

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{10} = 40, \quad 3 \leq x_i \leq 6$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = y_1 + 3 \\ x_2 = y_2 + 3 \\ x_3 = y_3 + 3 \\ \vdots \\ x_{10} = y_{10} + 3 \end{array} \right\} \quad 0 \leq y_i \leq 3$$

$$(y_1 + 3) + (y_2 + 3) + (y_3 + 3) + \dots + (y_{10} + 3) = 40$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{10} = 10 \quad 0 \leq y_i \leq 3$$

10 özdeş hediye 10 kişiye  $S_0 = \binom{19}{8}$  farklı şekilde dağıtıllır.

$y_i$  lerden herhangi birisi 4 ya da 4 ten büyük olsun.

$$y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{10} = 10$$

↓

$$4 + a$$

$$a + y_2 + y_3 + \dots + y_{10} = 6$$

6 özdeş hediye 10 kişiye  $\binom{15}{6}$  farklı şekilde dağıtıllır.

$$S_1 = \binom{10}{1} \cdot \binom{15}{6}$$

$y_i$  lerden herhangi ikisi 4 ya da 4 ten büyük olsun.

$$y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{10} = 10$$

↓

$$4 + a$$

$$a + b + y_3 + \dots + y_{10} = 2$$

2 özdeş hediye 10 kişiye  $\binom{11}{2}$  farklı şekilde dağıtıllır.

$$S_2 = \binom{10}{2} \cdot \binom{11}{2}$$

$$S_0 - S_1 + S_2 = \binom{19}{8} - \binom{10}{1} \cdot \binom{15}{6} + \binom{10}{2} \cdot \binom{11}{2}$$

$$= 75582 - 5005 + 2475 = 72952 \text{ bulunur.}$$

**Cevap : E**

### ÖRNEK - 36

**İç açıları en az 55° er derece olup iç açılarının her biri tam sayı olan ve çevreleri sabit kaç farklı ABC üçgeni vardır?**

- A) 36      B) 48      C) 72      D) 96      E) 136



Açıların her birini özdeş hediye gibi düşünelim.

Üçgenin iç açıları  $x, y$  ve  $z$  olsun.

$x + y + z = 180^\circ$  olduğundan  $180$  özdeş hediyeyi 3 kişiye her birine en az 55° er hediye verilmesi koşuluyla dağıtacağız. Her birine 55° er hediye verilirse

$$55 \cdot 3 = 165$$

$$180 - 165 = 15$$

kalan 15 hediyeyi 3 kişiye istediğimiz şekilde dağıtabiliriz.

$$H = 15 \quad \binom{n+H-1}{H} = \binom{17}{15} = 136 \text{ bulunur.}$$

$$n = 3$$

**Cevap : E**

### ÖRNEK - 37

a, b, c, d, e, f doğal sayılardır.

$$a + b + c = 4$$

$$d + e + f = 6$$

**olduğuna göre kaç farklı (a, b, c, d, e, f) sıralı altılısı vardır?**

- A) 120      B) 360      C) 420      D) 600      E) 720



$$a + b + c = 4$$

$$H = 4 \quad \binom{n+H-1}{H} = \binom{6}{4} = 15$$

$$n = 3$$

$$d + e + f = 6$$

$$H = 6 \quad \binom{n+H-1}{H} = \binom{8}{6} = 28$$

$$n = 3$$

15 farklı (a, b, c) üçlüsünün her biri için 28 farklı (d, e, f) sıralı üçlüsü bulunacağından,  $15 \cdot 28 = 420$  bulunur.

**Cevap : C**

**ÖRNEK - 38**

$a + b + c \leq 10$  eşitsizliğini sağlayan kaç farklı  $(a, b, c)$  doğal sayı sıralı üçlüsü vardır?

- A)  $\binom{10}{2}$     B)  $\binom{11}{2}$     C)  $\binom{12}{3}$     D)  $\binom{13}{2}$     E)  $\binom{13}{3}$



$$a + b + c = 10$$

$$H = 10 \\ n = 3 \quad \binom{n+H-1}{H} = \binom{12}{10} = \binom{12}{2}$$

$$a + b + c = 9 \Rightarrow \binom{11}{9} = \binom{11}{2}$$

$$a + b + c = 8 \Rightarrow \binom{10}{8} = \binom{10}{2}$$

⋮

$$a + b + c = 1 \Rightarrow \binom{3}{1} = \binom{3}{2}$$

$$a + b + c = 0 \Rightarrow \binom{2}{0} = \binom{2}{2}$$

$$\binom{a}{a} + \binom{a+1}{a} + \binom{a+2}{a} + \dots + \binom{a+b}{a} = \binom{a+b+1}{a+1}$$

olduğundan

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{11}{2} + \binom{12}{2} = \binom{12+1}{2+1} = \binom{13}{3}$$

bulunur.



$a + b + c \leq 10$  ifadesini herhangi bir d doğal sayısı için

$a + b + c + d = 10$  şeklinde yazabiliriz

Çünkü  $d = 0$  için  $a + b + c = 10$

$d = 1$  için  $a + b + c = 9$

⋮

⋮

$d = 10$  için  $a + b + c = 0$

$a + b + c \leq 10$  şartını sağlıyor.

$a + b + c + d = 10$  şartını sağlayan kaç farklı  $(a, b, c, d)$  doğal sayı dörtlüsü bulunabilir.

$$H = 10 \\ n = 4 \quad \binom{H+n-1}{H} = \binom{13}{10} = \binom{13}{3}$$

**Cevap : E**

**ÖRNEK - 39**

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinin elemanları ardışık sayılar icermez?

- A) 35    B) 42    C) 48    D) 55    E) 60



$\{x_1, x_2, x_3\}$  A kümesinin içinde ardışık sayılar içermeyen alt kümesi ve  $x_1 < x_2 < x_3$  olsun.

$$1 \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq 9$$

$x_1$  ile  $x_2$  ardışık sayılar olmayacağından  $x_1$  ile  $x_2$  arasındaki fark 1 olamaz.

$x_2 - x_1 \geq 2$  olmalıdır. Aynı şekilde  $x_3 - x_2 \geq 2$  olmalıdır.

$$\begin{array}{r} x_1 - 1 = a \geq 0 \\ x_2 - x_1 = b \geq 2 \\ x_3 - x_2 = c \geq 2 \\ + \quad 9 - x_3 = d \geq 0 \\ \hline 8 = a + b + c + d \end{array}$$

$b \geq 2$  ve  $c \geq 2$  olduğundan

$$8 = a + b + c + d \\ \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad p+2 \quad k+2$$

$$4 = a + p + k + d$$

$$H = 4 \\ n = 4 \quad \binom{H+n-1}{H} = \binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35 \text{ bulunur.}$$

Bu sorunun çözümünü genelleyecek olursak,

$\{1, 2, 3, \dots, n\}$  elemanlı kümənin r elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinin elemanları ardışık sayılar içermeyeceğini formülleştirelim.

$$1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_r \leq n$$

$$x_1 - 1 = c_1 \geq 0$$

$$x_2 - x_1 = c_2 \geq 2$$

$$x_3 - x_2 = c_3 \geq 2$$

⋮

$$+ \quad n - x_r = c_{r+1} \geq 0$$

$$\begin{array}{r} n - 1 = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_r + c_{r+1} \\ \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad 2 + d_1 \quad 2 + d_2 \quad 2 + d_r \end{array}$$

$$H = n - 2r + 1$$

$$n = r + 1$$

$$\binom{H+n-1}{H} = \binom{n-r+1}{n-2r+1} = \binom{n-r+1}{r}$$

$n$  elemanlı kümenin  $r$  elemanlı içinde ardışık sayılar içermeyen alt kümelerinin sayısı  $\binom{n-r+1}{r}$  dir.

Soruda

$$n = 9$$

$$r = 3$$

$$\binom{n-1+1}{r} = \binom{9-3+1}{3} = \binom{7}{3} = 35 \text{ bulunur.}$$

**Cevap : A**

#### ÖRNEK - 40

1000 den küçük doğal sayıların kaç tanesinde rakamlar toplamı 8 dir?

- A) 20      B) 30      C) 45      D) 60      E) 72



1000 den küçük doğal sayılar en fazla üç basamaklı olur. Bu sayıları abc ile gösterelim. abc sayısında a, b ve c rakamları 0 olabilir. Çünkü 1000 den küçük doğal sayılar üç, iki ve bir basamaklı olabilir.

$a + b + c = 8$  şartını sağlayan,

(a, b, c) doğal sayı üçlerinin sayısını bulalım.

$$H = 8 \\ n = 3 \quad \binom{n+H-1}{H} = \binom{10}{8} = 45 \text{ bulunur.}$$

**Cevap : C**

#### ÖRNEK - 41

1000 den küçük doğal sayıların kaç tanesinde rakamlar toplamı 13 tür?

- A) 40      B) 75      C) 90      D) 105      E) 120



Bu sayıları abc ile gösterelim.

$$a \leq 9$$

$$b \leq 9$$

$c \leq 9$  Şartlarını sağlayan  $a + b + c = 13$  olan doğal sayı üçlerinin sayısını bulacağız.

$$a + b + c = 13$$

$$H = 13 \\ n = 3 \quad \binom{n+H-1}{H} = \binom{15}{13} = \binom{15}{2} = 105$$

a, b ve c harflerinden herhangi birisi 9 dan büyük olsun.

$$a = 10 + x \text{ alalım.}$$

$$a + b + c = 13$$

$$\downarrow$$

$$10 + x$$

$$x + b + c = 3$$

$$H = 3 \\ n = 3 \quad \binom{n+H-1}{H} = \binom{5}{3} = 10$$

b veya c de 9 dan büyük olabilir.

$3 \cdot 10 = 30$  tane sayı yukarıdaki şartı sağlamadığından

$$105 - 30 = 75 \text{ bulunur.}$$

**Cevap : B**

#### ÖRNEK - 42

8 kişi, üç sıraya her sıraya en az bir kişi oturması koşuluyla kaç farklı şekilde oturabilirler?

- A) 6!      B) 5 . 6!      C) 7!      D) 21 . 8!      E) 10!



İlk olarak kişileri özdeş kabul edelim. Her sıraya 1 kişi oturduktan sonra kalan  $8 - 3 = 5$  kişi üç sıraya

$$H = 5$$

$$n = 3 \quad \binom{n+H-1}{H} = \binom{7}{5} = 21 \text{ farklı şekilde oturabilir.}$$

Kişiler özdeş olmadığından 21 farklı durumda her bir durum için  $8!$  farklı sıralama oluşur.

$$21 \cdot 8!$$

**Cevap : D**

**ÖRNEK - 43**

6 farklı hediye 3 kişiye her birine en az birer hediye verilmesi koşuluyla kaç farklı şekilde dağıtılabılır?

- A) 120      B) 150      C) 240      D) 460      E) 540



$$S_1 = 3^6$$

$$1 \text{ kişi hediye almasın} = S_2 = \binom{3}{1} \cdot 2^6$$

$$2 \text{ kişi hediye almasın} = S_3 = \binom{3}{2} \cdot 1^6$$

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 + S_3 &= 3^6 - \binom{3}{1} \cdot 2^6 + \binom{3}{2} \cdot 1^6 \\ &= 729 - 192 + 3 \\ &= 540 \end{aligned}$$

**Cevap : E**

" Bu soru şu şekilde de sorulabilirdi.

6 elemanlı bir kümeden 3 elemanlı bir kümeye tanımlanabilecek örten fonksiyon sayısı kaçtır?"

**ÖRNEK - 44**

5 tane özdeş matematik, 2 tane farklı kimya, 1 fizik kitabı üç öğrenciye kaç farklı şekilde dağıtılabılır?

- A) 120      B) 240      C) 360      D) 485      E) 567



İlk olarak 5 özdeş matematik kitabını 3 öğrenciye dağıtalım.

$$\begin{aligned} H &= 5 \\ n &= 3 \quad \binom{n+H-1}{H} = \binom{7}{5} = 21 \end{aligned}$$

2 farklı kimya kitabı 3 öğrenciye

$3 \cdot 3 = 9$  farklı şekilde dağıtılabılır.

1 fizik kitabı 3 öğrenciye 3 farklı şekilde dağıtılabılır.  
Toplam durum sayısı =  $21 \cdot 9 \cdot 3 = 567$

**Cevap : E**

**ÖRNEK - 45**

Bileşenlerinin çarpımı 96 olan kaç farklı  $(a, b, c)$  doğal sayı üçlüsü yazılabilir?

- A) 24      B) 36      C) 51      D) 63      E) 75



$$96 = 2^5 \cdot 3$$

İlk olarak 5 özdeş 2 sayısını a, b veya c ye dağıtalım.

$$\begin{aligned} H &= 5 \\ n &= 3 \quad \binom{n+H-1}{H} = \binom{7}{5} = 21 \end{aligned}$$

3 sayısını a, b veya c ye 3 farklı şekilde dağıtabiliriz.  
Toplam durum sayısı  $21 \cdot 3 = 63$  bulunur.

**Cevap : D**

**ÖRNEK - 46**

$\binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{9}{4}$  işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A)  $\binom{10}{3}$       B)  $\binom{10}{4}$       C)  $\binom{10}{5}$       D)  $\binom{11}{3}$       E)  $\binom{11}{4}$



$$\binom{x}{a} + \binom{x}{a+1} = \binom{x+1}{a+1} \text{ eşitliğini ispatlayalım.}$$

$$\binom{x}{a} + \binom{x}{a+1} = \frac{x!}{a!(x-a)!} + \frac{x!}{(a+1)!(x-a-1)!}$$

$$\frac{(a+1) \cdot x! + (x-a) \cdot x!}{(a+1)! \cdot (x-a) \cdot (x-a-1)!}$$

$$\frac{x! \cdot (a+1+x-a)}{(a+1)! \cdot (x-a)!} = \frac{(x+1) \cdot x!}{(a+1)! \cdot (x-a)!}$$

$$= \frac{(x+1)!}{(a+1)! \cdot (x-a)!} = \binom{x+1}{a+1} \text{ olur.}$$

$$\binom{x}{a} + \binom{x}{a+1} = \binom{x+1}{a+1} \text{ olduğundan,}$$

$$\binom{8}{2} + \binom{8}{3} = \binom{9}{3}$$

$$= \underbrace{\binom{8}{2} + \binom{8}{3}}_{\binom{9}{3}} + \binom{9}{4} = \binom{9}{3} + \binom{9}{4} = \binom{10}{4}$$

**Cevap : B**

**ÖRNEK - 47**

$\binom{10}{5} + \binom{11}{5} + \binom{12}{5}$  işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A)  $\binom{13}{7} - \binom{10}{4}$

B)  $\binom{13}{6}$

C)  $\binom{13}{7}$

D)  $\binom{12}{6} + \binom{13}{7}$

E)  $\binom{14}{6} - 1$



$$\binom{11}{5} = \binom{11}{6}, \quad \binom{12}{5} = \binom{12}{7}$$

$$\binom{10}{5} + \binom{11}{5} + \binom{12}{5} = \binom{10}{5} + \binom{11}{6} + \binom{12}{7} = x \text{ olsun.}$$

eşitliğinin her iki tarafına  $\binom{10}{4}$  eklenirse

$$\underbrace{\binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{11}{6} + \binom{12}{7}}_{\binom{11}{5}} = x + \binom{10}{4}$$

$$\underbrace{\binom{11}{5} + \binom{11}{6} + \binom{12}{7}}_{\binom{12}{6}} = x + \binom{10}{4}$$

$$\binom{12}{6} + \binom{12}{7} = x + \binom{10}{4}$$

$$\binom{13}{7} = x + \binom{10}{4}$$

$$x = \binom{13}{7} - \binom{10}{4}$$

**Cevap : A**

**ÖRNEK - 48**

$\binom{10}{3} + \binom{11}{4} + \binom{12}{5}$  işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 960

B) 1001

C) 1242

D) 1365

E) 1571



$\binom{10}{3} + \binom{11}{4} + \binom{12}{5} = x$  eşitliğinin her iki tarafına  $\binom{10}{2}$  ni ekleyelim.

$$\underbrace{\binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{11}{4} + \binom{12}{5}}_{\binom{11}{3}} = x + \binom{10}{2}$$

$$\underbrace{\binom{11}{3} + \binom{11}{4} + \binom{12}{5}}_{\binom{12}{4}} = x + 45$$

$$\binom{12}{4} + \binom{12}{5} = x + 45$$

$$\binom{13}{5} = x + 45$$

$$x = \binom{13}{5} - 45 = 1287 - 45 = 1242 \text{ bulunur.}$$

**Cevap : C**

**ÖRNEK - 49**

Aşağıda verilen,

- a)  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)$
- b)  $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2)$
- c)  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2)(n+3)$

$n = 10$  için değerlerini bulalım.



$$a) 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)$$

$$= 2! \cdot \left[ \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n+1}{2} \right]$$

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \dots + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n+1}$$

olduğundan

$$= 2 \underbrace{\left[ \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n+1}{2} \right]}_{\binom{n+2}{3}} = 2 \cdot \binom{n+2}{3}$$

$$= 2 \cdot \frac{(n+2)(n+1)n}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$n = 10$  için

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 10 \cdot 11 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{3} = 440$$

$$b) 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2)$$

$$= 3! \cdot \underbrace{\left[ \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \dots + \binom{n+2}{3} \right]}_{\binom{n+3}{4}}$$

$$= 6 \cdot \binom{n+3}{4} = 6 \cdot \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$n = 10$  için,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{4} = 4290$$

$$c) 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$4! \cdot \underbrace{\left[ \binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \dots + \binom{n+3}{4} \right]}_{\binom{n+4}{5}}$$

$$= 24 \cdot \binom{n+4}{5} = 24 \cdot \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$$

$n = 10$  için

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{5}$$

$$= 48048 \text{ bulunur.}$$

**ÖRNEK - 50**

$$\binom{7}{1} + 2 \cdot \binom{7}{2} + 3 \cdot \binom{7}{3} + 4 \cdot \binom{7}{4} + 5 \cdot \binom{7}{5} + 6 \cdot \binom{7}{6} + 7 \cdot \binom{7}{7}$$

işleminin sonucu kaçtır?

- A) 240      B) 324      C) 404      D) 448      E) 563



$$\binom{7}{1} = \binom{7}{6}, \binom{7}{2} = \binom{7}{5}, \dots, \binom{7}{7} = \binom{7}{0} \text{ olduğundan}$$

$$\binom{7}{1} + 2 \cdot \binom{7}{2} + 3 \cdot \binom{7}{3} + 4 \cdot \binom{7}{4} + 5 \cdot \binom{7}{5} + 6 \cdot \binom{7}{6} + 7 \cdot \binom{7}{7} = x \text{ olsun,}$$

$$+ \binom{7}{6} + 2 \cdot \binom{7}{5} + 3 \cdot \binom{7}{4} + 4 \cdot \binom{7}{3} + 5 \cdot \binom{7}{2} + 6 \cdot \binom{7}{1} + 7 \cdot \binom{7}{0} = x \text{ olur.}$$

$$7 \cdot \binom{7}{0} + 7 \cdot \binom{7}{1} + 7 \cdot \binom{7}{2} + 7 \cdot \binom{7}{3} + 7 \cdot \binom{7}{4} + 7 \cdot \binom{7}{5} + 7 \cdot \binom{7}{6} + 7 \cdot \binom{7}{7} = 2x$$

$$7 \left[ \binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} \right] = 2x$$

$$7 \cdot 2^7 = 2x$$

$$7 \cdot 2^6 = x$$

$x = 448$  bulunur.

**Cevap : D**

**ÖRNEK - 51**

$$\binom{8}{0}^2 + \binom{8}{1}^2 + \binom{8}{2}^2 + \dots + \binom{8}{7}^2 + \binom{8}{8}^2$$

İşleminin sonucu kaçtır?

- A)  $\binom{12}{6}$       B)  $\binom{12}{8}$       C)  $\binom{14}{6}$   
 D)  $\binom{14}{8}$       E)  $\binom{16}{8}$



$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

olduğundan

$$\binom{8}{0}^2 + \binom{8}{1}^2 + \dots + \binom{8}{8}^2 = \binom{16}{8} \text{ bulunur.}$$

**Cevap : E**

**ÖRNEK - 52**

$$\binom{x}{3} = 1.14 + 2.13 + 3.12 + \dots + 13.2 + 14.1$$

Yukarıdaki eşitliğin sağındaki her bir sayının iki çarpanından birincisi 1 den başlayarak ve birer artarak 14 e kadar giderken, ikinci çarpan ise 14 ten başlayıp birer azalarak 1 e kadar gelmektedir.

Buna göre x kaçtır?

- A) 13      B) 14      C) 15      D) 16      E) 18



Örneğin  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  kümelerinin üç elemanlı alt kümelerinin sayısını kombinasyon kullanmadan bulalım. Üç tane seçeceğimiz elemanın ortanca elemanı 2 olanların sayısı

$$\underbrace{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}}_{3 \text{ tanedir.}}$$

Ortanca eleman 2 olanların sayısı şu şekilde bulunabilir. Ortanca eleman 2 olduğunda, küçük eleman 1 , büyük eleman 3, 4 veya 5 olabilir.

Küçük elemanı 1 farklı, büyük elemanı 3 farklı şekilde küçük ve büyük elemanı birlikte  $1 \cdot 3 = 3$  farklı şekilde seçebiliriz.

ortanca eleman 2 olduğunda

$$\frac{1}{(1)} \frac{3}{(2)} \frac{3}{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}} = 1 \cdot 3$$

ortanca eleman 3 olduğunda

$$\frac{2}{(1)} \frac{2}{(2)} \frac{2}{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}} = 2 \cdot 2$$

ortanca eleman 4 olduğunda

$$\frac{3}{(1)} \frac{1}{(4)} \frac{1}{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = 3 \cdot 1$$

ortanca eleman 1 ya da 5 olamaz.

Bu durumda  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  kümelerinin 3 elemanlı alt küme sayısı

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 10 \text{ bulunur.}$$

Bu mantıkta sorudaki küme x elemanlı

$\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, x\}$  olsun. 3 elemanlı alt kümeleri bulunurken

Ortadaki eleman 2 olursa

$$\frac{1}{(1)} \frac{(x-2)}{(2)} \frac{(x-2)}{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}} = 1 \cdot (x-2)$$

ortadaki eleman 3 olursa

$$\frac{2}{(1)} \frac{(x-3)}{(2)} \frac{(x-3)}{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}} = 2 \cdot (x-3)$$

ortadaki eleman 4 olursa

$$\frac{3}{(1)} \frac{(x-4)}{(2)} \frac{(x-4)}{\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}} = 3 \cdot (x-4)$$

ortadaki eleman  $(x-2)$  olursa

$$\frac{(x-3)}{(1)} \frac{2}{(x-2)} \frac{2}{(x-1)} \frac{2}{\begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = (x-3) \cdot 2$$

**Cevap : E**

 ortadaki eleman  $(x - 1)$  olursa

$$\frac{x-2}{1} \cdot \frac{1}{(x-1)} \cdot \frac{1}{x} = (x-2) \cdot 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (x-2)$$

 $x$  elemanlı kümenin 3 elemanlı alt küme sayıları toplamı

$$\binom{x}{3} = 1 \cdot (x-2) + 2 \cdot (x-3) + \dots + (x-3) \cdot 2 + (x-2) \cdot 1$$

bulunur.

Ayrıca soruda

$$\binom{x}{3} = 1 \cdot 14 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 12 + \dots + 13 \cdot 2 + 14 \cdot 1$$

verildiğinden aynı sırada bulunan herhangi iki ifadeyi eşitleyelim.

$x - 2 = 14$

 $x = 16$  bulunur.

**Cevap : D**
**ÖRNEK - 53**

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  kümesinin elemanlarıyla 3 ile tam olarak bölünebilen üç basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

- A) 81      B) 120      C) 162      D) 210      E) 243



Herhangi iki basamağına gelecek rakamlar rastgele yazıldıkten sonra diğer basamağa ancak üç farklı rakam yazılabılır. Son yazacağımız rakamla birlikte rakamlar toplamı 3 ün katı olmalıdır.

Örneğin, üç basamaklı abc sayısında  $a = 4$ ,  $b = 1$  olsun.  $a$  ve  $b$  yi rastgele dokuz rakam arasından seçtiğimizde. Başka rakamlarda seçilebilirdi.

 $a + b + c = 3$  ün katı olmalı

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & \left( \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 7 \end{array} \right) \end{array}$$

$a = 4$  ve  $b = 1$  alındığında rakamlar toplamı 3 ün katı olması için  $c$  rakamı 1, 4 ya da 7 olabilir. Yani  $c$  rakamı 3 farklı değer alır. O halde, 3 ile tam olarak bölünebilen abc üç basamaklı sayılarının adedi bulunurken  $a$  ya da  $b$  için dokuzar,  $c$  için üç farklı seçenek vardır.

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 9 & 9 & 3 \end{array} = 243 \text{ bulunur.}$$

**Cevap : E**


3 ile tam olarak bölünen sayılar = {3, 6, 9}

3 ile bölündüğünde 1 kalanı veren sayılar = {1, 4, 7}

3 ile bölündüğünde 2 kalanını veren sayılar = {2, 5, 8}

Yazılacak üç basamaklı sayılar

1. Üç eleman {3, 6, 9} dan seçilirse

$$\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 3 \\ \hline \left( \begin{array}{c} 3 \\ 6 \\ 9 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} 3 \\ 6 \\ 9 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} 3 \\ 6 \\ 9 \end{array} \right) \end{array} = 27$$

2. Üç eleman {1, 4, 7} den seçilirse

$$\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 3 \\ \hline \left( \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 7 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 7 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 7 \end{array} \right) \end{array} = 27$$

3. Üç eleman {2, 5, 8} den seçilirse

$$\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 3 \\ \hline \left( \begin{array}{c} 2 \\ 5 \\ 8 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} 2 \\ 5 \\ 8 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} 2 \\ 5 \\ 8 \end{array} \right) \end{array} = 27$$

4. {3, 6, 9} dan bir tane, {1, 4, 7} den bir tane, {2, 5, 8} den bir tane seçilirse,

$$\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 3 \\ \hline \left( \begin{array}{c} 3 \\ 6 \\ 9 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 7 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} 2 \\ 5 \\ 8 \end{array} \right) \end{array} + \begin{array}{ccc} 3 & 3 & 3 \\ \hline \left( \begin{array}{c} 3 \\ 6 \\ 9 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} 2 \\ 5 \\ 8 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 7 \end{array} \right) \end{array} + \dots + \begin{array}{ccc} 3 & 3 & 3 \\ \hline \left( \begin{array}{c} 2 \\ 5 \\ 8 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 7 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} 3 \\ 6 \\ 9 \end{array} \right) \end{array} \\ 3! = 6 \end{array}$$

$27 \cdot 6 = 162$

$\text{Toplam} = 27 + 27 + 27 + 162 = 243$



Üç basamaklı üç ile tam olarak bölünebilen doğal sayılar,

$$\{102, 105, 108, \dots, 999\}$$

$$\frac{999 - 102}{3} + 1 = 300 \text{ tane}$$

Verilen kümede 0(sıfır) olmadığı için 0 geçen 3 ün katı olan sayıların adedi bulunup 300 den çıkartılır.

$$\begin{array}{llll} 102 & 201 & \dots & 903 \\ 105 & 204 & & 906 \\ 108 & 207 & & 909 \\ 120 & 210 & & 930 \\ 150 & 240 & & 960 \\ 180 & 270 & & 990 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} 6 \cdot 9 = 54 \text{ tane}$$

$$\begin{array}{ll} 300 \\ 600 \\ 900 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 3 \text{ tane}$$

$$54 + 3 = 57 \text{ tane}$$

$$300 - 57 = 243 \text{ bulunur.}$$

**Cevap : E**

**ÖRNEK - 54**

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} kümesinin elemanlarıyla 9 ile tam olarak bölünebilen üç basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

- A) 45      B) 60      C) 72      D) 81      E) 90



Herhangi iki basamağına gelecek rakamlar rastgele yazıldıkten sonra diğer basamağa ancak bir rakam yazılabilir. Son yazacağımız rakamlı birlikte rakamlar toplamı 9 un katı olmalıdır. Örneğin, üç basamaklı abc sayısında a=5 ve b=7 olsun. a ve b yi rastgele dokuz rakam arasından seçtik. Başka rakamlarda seçilebilirdi.

$a + b + c = 9$  un katı olmalı

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 7 & (6) \end{array}$$

Bu durumda c=6 yani c rakamı bir değer alır. O halde, 9 ile tam olarak bölünebilen abc üç basamaklı sayılarının adedi bulunurken a ya da b için dokuzar, c için bir farklı seçenek vardır.

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 9 \cdot 9 \cdot 1 & = & 81 \end{array} \text{ bulunur.}$$

**II. yol:**

9 un katı üç basamaklı doğal sayılar,

$$\{108, 117, \dots, 999\} \quad \frac{999 - 108}{9} + 1 = 100 \text{ tane}$$

İçinde 0(sıfır) rakamı geçen 9 un katı olan sayılar

$$\begin{array}{llll} 108 & 207 & 306 & \dots & 909 \\ 180 & 270 & 360 & \dots & 990 \\ \hline & & & & 9 \cdot 2 = 18 \text{ tane} \end{array}$$

900 → 1 tane

$18 + 1 = 19$  tane

$100 - 19 = 81$  tane

**Cevap : D**

**ÖRNEK - 55**

$$\binom{20}{4} + \binom{20}{3} \cdot \binom{10}{1} + \binom{20}{2} \cdot \binom{10}{2} + \binom{20}{1} \cdot \binom{10}{3} + \binom{10}{4}$$

toplamanın sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A)  $\binom{20}{5}$       B)  $\binom{21}{5}$       C)  $\binom{21}{4}$       D)  $\binom{30}{3}$       E)  $\binom{30}{4}$



20 erkek ve 10 kız öğrencinin bulunduğu bir sınıfın 4 kişilik grup kaç farklı şekilde oluşturulabilir şeklinde verilen bir sorunun cevabı bulunurken

$$\binom{4 \text{ erkek}}{4} \cdot \binom{3 \text{ erkek} 1 \text{ kız}}{1} \cdot \binom{2 \text{ erkek} 2 \text{ kız}}{2} \cdot \binom{1 \text{ erkek} 3 \text{ kız}}{1} \cdot \binom{4 \text{ kız}}{4}$$

$$\binom{20}{4} + \binom{20}{3} \cdot \binom{10}{1} + \binom{20}{2} \cdot \binom{10}{2} + \binom{20}{1} \cdot \binom{10}{3} + \binom{10}{4}$$

O halde;

$20 + 10 = 30$  kişilik bir sınıfın 4 kişiyi  $\binom{30}{4}$  farklı şekilde seçeriz. Cevap  $\binom{30}{4}$  bulunur.

**Cevap : E**

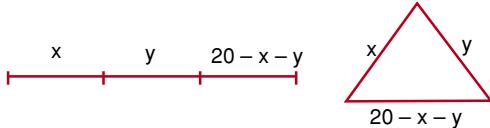
**ÖRNEK - 56**

Uzunluğu  $a$  br olan bir doğru parçası üzerinde rastgele iki nokta işaretleniyor. Elde edilen üç parça ile üçgen oluşturma olasılığı kaçtır?

- A)  $\frac{1}{8}$       B)  $\frac{1}{6}$       C)  $\frac{1}{4}$       D)  $\frac{1}{3}$       E)  $\frac{1}{2}$



$a = 20$  br olsun. Şimdi uzunluğu 20 br olan çubuğu rastgele uzunlukları  $x$  br,  $y$  br ve  $20 - x - y$  br olan üç parçaya ayıralım.



Bir üçgende herhangi bir kenarın uzunluğu üçgenin çevresinin yarısından küçüktür. Bu durumda çevre = 20 br olduğundan kenarların her biri  $\frac{20}{2} = 10$  br den küçüktür.

$$x < 10$$

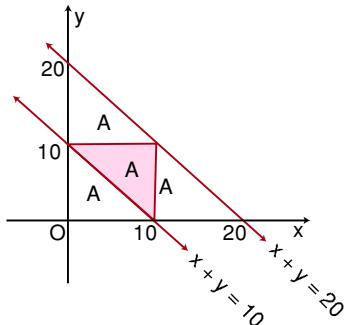
$$y < 10$$

$$20 - x - y < 10$$

$$x + y > 10$$

Üçgenin çevresi 20 br olduğundan  $x + y < 20$  olur.

$x < 10$ ,  $y < 10$ ,  $10 < x + y < 20$  bağıntılarının belirttiği bölgeyi koordinat düzleminde gösterelim.



Şekilde  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $x + y < 20$  bağıntısının bulunduğu  $4A$  br<sup>2</sup> lik bölge tüm durumların bulunduğu bölgeyi,

$x < 10$ ,  $y < 10$ ,  $10 < x + y < 20$  bağıntılarının bulunduğu şekilde taralı gösterilen A br<sup>2</sup> lik bölge ise istenilen durumların bulunduğu bölgeyi göstermektedir.

O halde,

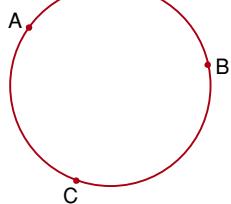
$$\frac{\text{istenen durum}}{\text{tüm durum}} = \frac{A}{4A} = \frac{1}{4}$$

**Cevap : C**

**ÖRNEK - 57**

Bir çember üzerinde rastgele işaretlenen üç noktası köşe kabul eden üçgenin dar açılı üçgen olma olasılığı kaçtır?

- A)  $\frac{1}{8}$       B)  $\frac{1}{6}$       C)  $\frac{1}{4}$       D)  $\frac{1}{3}$       E)  $\frac{1}{2}$

**Gözde :**


Çemberin çevresi 20 br

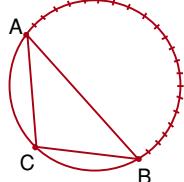
$$m(\widehat{AB}) = x \text{ br}$$

$$m(\widehat{BC}) = y \text{ br}$$

$$m(\widehat{AC}) = 20 - x - y \text{ br olsun}$$

AB, BC ve AC yaylarının uzunlukları yarımdır. Çember yayından yani  $\frac{20}{2} = 10$  br den küçük olmalıdır. Çünkü büyük olursa açılardan birisi geniş açı olurdu.

Örneğin;



$$m(\widehat{AB}) > 180^\circ \text{ olduğunda } AB$$

yayını gören C açısı

$$\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \text{ den büyük olur.}$$

Bu durumda

$$m(\widehat{AB}) = x < 10$$

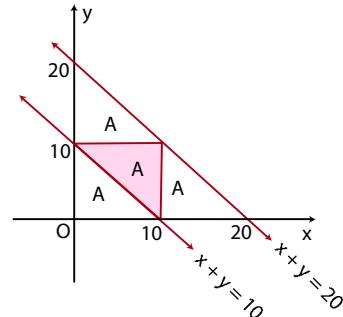
$$m(\widehat{BC}) = y < 10$$

$$m(\widehat{AC}) = 20 - x - y < 10$$

$$x + y > 10$$

Çemberin çevresi 20 br olduğundan  $x + y < 20$  olur.

$x < 10$ ,  $y < 10$ ,  $10 < x + y < 20$  bağıntılarının belirttiği bölgeyi koordinat düzleminde gösterelim.



Şekilde  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $x + y < 20$  bağıntısının bulunduğu  $4A$  br<sup>2</sup> lik bölge tüm durumların bulunduğu bölgeyi,

$x < 10$ ,  $y < 10$ ,  $10 < x + y < 20$  bağıntılarının bulunduğu şekilde taralı gösterilen A br<sup>2</sup> lik bölge ise istenilen durumların bulunduğu bölgeyi göstermektedir.

O halde,

$$\frac{\text{istenen durum}}{\text{tüm durum}} = \frac{A}{4A} = \frac{1}{4}$$

**Cevap : C**