

Tanım: $f: A \rightarrow R$ fonksiyonu, $A \subset R$ için $x = a$ noktası $\lim_{x \rightarrow a}$ ta tanımlı olsun.

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ limiti varsa bu limite f nin $x = a$ noktasındaki türevi denir ve $f'(a)$ veya $\frac{df}{dx}(a)$ ile gösterilir.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow \text{soldan türev}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow \text{sağdan türev}$$

$x = a$ da f fonksiyonunun türevi varsa sağdan ve soldan türevleri eşit olmalıdır.

* Türevin olmadığı noktaları bulmak için parça-lı fonksiyonların sürekli oldukları noktalarda ve özel tanımlı fonksiyonların kritik noktalarda sağdan ve soldan türevlere bakılır.

Örnek:

$f(x) = x^2 + 3x$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki türevini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 3x) - 10}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)} \\ &= 2+5=7 \end{aligned}$$

$f'(2)=7$ bulunur.

Örnek:

$f(x) = |x^2 - 16|$ fonksiyonunun $x = 4$ noktasındaki türevini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{|x^2 - 16| - f(4)}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{-(x^2 - 16) - 0}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{-(x-4)(x+4)}{(x-4)} \\ &= -(4+4)=-8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{|x^2 - 16| - f(4)}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(x^2 - 16) - 0}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)} \\ &= 4+4=8 \end{aligned}$$

$x = 4$ noktasında sağdan ve soldan türevler farklı olduğu için türev yoktur.

Tanım: $f: (a, b) \rightarrow R$ fonksiyonu, (a, b) aralığının tüm noktalarında türevli ise f fonksiyonu bu aralıkta türevlidir denir ve

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ ile gösterilir.}$$

Örnek:

$f: R \rightarrow R$, $f(x) = c \in R$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0 \\ f'(x) = 0 \text{ (sabitinin türevi sıfırdır.)} \end{aligned}$$

Örnek:

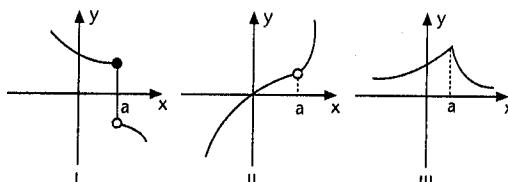
$f(x) = ax + b$, $a \in R$ için $f'(x)$ i bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)+b - (ax+b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah+ah+b - ax - b}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = a \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$f'(x) = a$ dır.

Türevle Süreklik Arasındaki Bağıntı:



f fonksiyonu $a \in R$ noktasında türevli ise bu noktada süreklidir. Bu teoremin karşıtı doğru değildir. (Bir

noktada sürekli olan bir fonksiyon bu noktada türevli olmayabilir.)

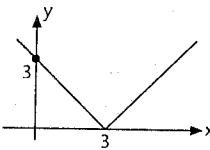
Şekil I ve II deki fonksiyonlar a noktasında sürekli olmadıkları için türevleri yoktur. III deki fonksiyon a noktasında sürekli olduğu halde türevi yoktur. a noktası fonksiyonun bir kırılma noktasıdır.

Örnek:

$f(x) = |x - 3|$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasında türevini bulunuz.

Çözüm:

f fonksiyonu \mathbb{R} de sürekli dir.



$$f'(3^+) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x - 3) - 0}{x - 3} = 1$$

$$f'(3^-) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x - 3) - 0}{x - 3} = -1$$

$f'(3^+) \neq f'(3^-)$ olduğu için türev yoktur.

* Bir noktadaki türev o noktada eğrinin teğetinin eğimidir. Kırılma noktalarında birden çok teğet çizildiği için eğimleri farklıdır. Bu noktalarda türev yoktur.

Türev Alma Kuralları:

$f(x)$ türevlenebilir bir fonksiyon ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$1. f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0 \text{ dır.}$$

$$2. f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$3. [f(x) \mp g(x)]' = f'(x) \mp g'(x)$$

$$4. u = u(x), v = v(x)$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

$$5. y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

$$6. y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$7. y = \sqrt[m]{u^n} \Rightarrow y' = \frac{n}{m} \cdot \frac{u'}{\sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

$$8. y = u^n \Rightarrow y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

$$9. y = c \cdot u \Rightarrow y' = c \cdot u'$$

Örnek:

$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x - 7$ ise $f'(x)$ türevini bulunuz.

Çözüm:

$$f'(x) = 3 \cdot 4 \cdot x^3 - 2 \cdot 3 \cdot x^2 + 4 \cdot 2 \cdot x - 5 \cdot 1 - 0$$

$$= 12x^3 - 6x^2 + 8x - 5 \text{ tır.}$$

Örnek:

$f(x) = (2x^3 - 3x)(x^2 - 4x - 1)$ ise $f'(2)$ değeri kaçtır?

Çözüm:

Çarpımın türevi $y' = u' \cdot v + v' \cdot u$ dur.

$$f(x) = \underbrace{(2x^3 - 3x)}_u \cdot \underbrace{(x^2 - 4x - 1)}_v$$

$$f'(x) = (6x^2 - 3)(x^2 - 4x - 1) + (2x - 4) \cdot (2x^3 - 3x)$$

$$f'(2) = 21 \cdot (4 - 8 - 1) + 0 \cdot 10$$

$$= 21 \cdot (-5) = -105 \text{ tır.}$$

Örnek:

$f(x) = (3x + 5)^3$ ise $f'(-2)$ kaçtır?

Çözüm:

$$y = u^n \Rightarrow y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u \text{ dur.}$$

$$f'(x) = 3 \cdot (3x + 5)^2 \cdot 3$$

$$f'(-2) = 3 \cdot (-6 + 5)^2 \cdot 3$$

$$= 3 \cdot 1 \cdot 3 = 9 \text{ dur.}$$

Örnek:

$f(x) = x^3 + 2x^{-2} + x^{\frac{2}{3}}$ ise $f'(1)$ kaçtır?

Çözüm:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x^{-2-1} + \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}$$

$$= 3x^2 - 4x^{-3} + \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(1) = 3 - 4 + \frac{2}{3} = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \text{ tür.}$$

Örnek:

$f(x) = (2x - 1)^3 \cdot (3x + 1)^2$ ise $f'(1)$ kaçtır?

Çözüm:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot (2x-1)^2 \cdot 2 \cdot (3x+1)^2 + 2(3x+1) \cdot 3(2x-1)^3 \\ f'(1) &= 3 \cdot 1^2 \cdot 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1^3 \\ &= 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 16 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \\ &= 96 + 24 = 120 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek:

$f'(x) = \frac{5x+2}{3x-4}$ ise $f'(2)$ kaçtır?

Çözüm:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5 \cdot (3x-4) - 3 \cdot (5x+2)}{(3x-4)^2} \\ &= \frac{15x-20-15x-6}{(3x-4)^2} \\ &= \frac{-26}{(3x-4)^2} \\ f'(2) &= \frac{-26}{2^2} = \frac{-26}{4} = -\frac{13}{2} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Not: 2×2 tipindeki determinantın açılımı

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c \text{ dir.}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ ise } f'(x) = \frac{a}{(cx+d)^2} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ dir.}$$

Örnek:

$f(x) = \frac{4x-2}{3x+7}$ ise $f'(-1)$ kaçtır?

Çözüm:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4 \cdot (3x+7) - (-2) \cdot 3}{(3x+7)^2} \\ &= \frac{4 \cdot 7 - (-2) \cdot 3}{(3x+7)^2} = \frac{28+6}{(3x+7)^2} \\ &= \frac{34}{(3x+7)^2} \\ f'(-1) &= \frac{34}{(4)^2} = \frac{34}{16} = \frac{17}{8} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek:

$f(x) = \frac{3}{(2x-1)^4}$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \cdot (2x-1)^{-4} \text{ yazılırsa,} \\ f'(x) &= 3 \cdot (-4) \cdot (2x-1)^{-5} \cdot 2 \\ &= -24 \cdot (2x-1)^{-5} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek:

$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$ ise $f'(3)$ kaçtır?

Çözüm:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \text{ dur.} \\ f'(x) &= \frac{2 \cdot x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 4}} \\ f'(3) &= \frac{6-3}{2 \cdot \sqrt{9-9+4}} \\ &= \frac{3}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{3}{4} \text{ tür.} \end{aligned}$$

Örnek:

$f(x) = \sqrt[5]{(3x-2)^3}$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x-2)^{\frac{3}{5}} \\ f'(x) &= \frac{3}{5} \cdot (3x-2)^{\frac{3}{5}-1} \cdot 3 \\ &= \frac{3}{5} \cdot (3x-2)^{\frac{-2}{5}} \cdot 3 \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{(3x-2)^{\frac{2}{5}}} \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{\sqrt[5]{(3x-2)^2}} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek:

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{2x+4}} \text{ ise } f'(x) \text{ i bulunuz.}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\frac{3x-1}{2x+4}\right)'}{2.f(x)} = \frac{12+2}{(2x+4)^2} \\ &= \frac{14}{(2x+4)^2 \cdot 2.f(x)} \\ &= \frac{7}{f(x) \cdot (2x+4)^2} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek:

$$f(x) = \frac{(3x-1)^4}{(2x-1)^2} \text{ ise } f'(1) \text{ kaçtır?}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4 \cdot (3x-1)^3 \cdot 3 \cdot (2x-1)^2 - 2 \cdot (2x-1) \cdot 2 \cdot (3x-1)^4}{(2x-1)^4} \\ f'(1) &= \frac{4 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2^4}{1^4} \\ &= 4 \cdot 8 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 16 \\ &= 96 - 64 = 32 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek:

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} \text{ ise } f'(1) \text{ kaçtır?}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(x + \sqrt{x}\right)'}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \\ f'(1) &= \frac{1 + \frac{1}{2}}{2\sqrt{1+1}} = \frac{\frac{3}{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{8} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Trigonometrik Fonksiyonların Türevi: $u = u(x)$ olmak üzere;

$$1. \quad y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$$

$$y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cdot \cos u$$

$$2. \quad y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$$

$$y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \cdot \sin u$$

$$3. \quad y = \tan x \Rightarrow y' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \tan u \Rightarrow y' = u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$4. \quad y = \cot x \Rightarrow y' = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$y = \cot u \Rightarrow y' = -u'(1 + \cot^2 u) = -\frac{u'}{\sin^2 u}$$

Örnek:

$$f(x) = \sin 3x + \cos 4x \text{ ise } f'(0) \text{ kaçtır?}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot \cos 3x - 4 \cdot \sin 4x \\ f'(0) &= 3 \cdot \cos(0) - 4 \cdot \sin(0) \\ &= 3 \cdot 1 - 4 \cdot 0 \\ &= 3 \text{ tür.} \end{aligned}$$

Örnek:

$$f(x) = \sin 2x \cdot \cos 3x \text{ ise } f'(x) \text{ i bulunuz.}$$

Çözüm:

$$f'(x) = 2 \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x - 3 \cdot \sin 3x \cdot \sin 2x \text{ tir.}$$

Örnek:

$$f(x) = \tan 2x + \cot 5x \text{ ise } f'(x) \text{ i bulunuz.}$$

Çözüm:

$$f'(x) = 2 \cdot (1 + \tan^2 2x) - 5 \cdot (1 + \cot^2 5x) \text{ tir.}$$

Örnek:

$$f(x) = \sin^3 x \text{ ise } f'(x) \text{ i bulunuz.}$$

Çözüm:

$$f(x) = (\sin x)^3$$

$$f'(x) = 3 \cdot \sin^2 x \cdot (\cos x) \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$f(x) = \cos^3(2x + 3)$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3 \cdot \cos^2(2x + 3) \cdot 2 \cdot \sin(2x + 3) \\ &= -6 \cdot \cos^2(2x + 3) \cdot \sin(2x + 3) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek:

$f(x) = \cos^2x \cdot \sin 2x$ ise $f'(\pi)$ kaçtır?

Çözüm:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x) \cdot \sin 2x + 2 \cdot \cos 2x \cdot \cos^2 x \\ f'(\pi) &= 2 \cdot \cos \pi \cdot (-\sin \pi) \cdot \sin 2\pi + 2 \cdot \cos 2\pi \cdot \cos^2 \pi \\ &= 2 \cdot (-1) \cdot (-0) \cdot (0) + 2 \cdot 1 \cdot (-1)^2 \\ &= 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek:

$f(x) = \tan x \cdot (1 + \cot x)$ ise $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kaçtır?

Çözüm:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 + \tan^2 x) \cdot (1 + \cot x) - (1 + \cot^2 x) \cdot \tan x \\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= (1 + 1) \cdot (1 + 1) - (1 + 1) \cdot 1 \\ &= 2 \cdot 2 - 2 = 2 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek:

$f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ ise $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kaçtır?

Çözüm:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \\ f'(x) &= -2 \cdot \sin 2x \\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \\ &= -2 \cdot 1 = -2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek:

$f(x) = \tan(\sin 4x)$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

Çözüm:

$$f'(x) = 4 \cdot \cos 4x (1 + \tan^2 \sin 4x) \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$f(x) = \cos(\sin x^3)$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

Çözüm:

$$f'(x) = -3x^2 \cdot \cos x^3 \cdot \sin(\sin x^3) \text{ bulunur.}$$

Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi:

1. $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin x$ ise
 $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], f^{-1}(x) = \arcsin x$
2. $y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y, x \in [0, \pi]$
 $\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \arccos x$
3. $y = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan y, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
 $\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \arctan x$
4. $y = \cot x \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} y, x \in (0, \pi)$
 $\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x$ tür.

Örnek:

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = x \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = x \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

$$\arctan(-1) = x \Rightarrow \tan x = -1$$

$$x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\operatorname{arccot}(1) = x \Rightarrow \cot x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ tür.}$$

$$* y = \arcsin u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$y = \arccos u \Rightarrow y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$y = \arctan u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$y = \operatorname{arccot} u \Rightarrow y' = -\frac{u'}{1+u^2} \text{ dir.}$$

Örnek:

$$f(x) = \text{Arccos}(2x) \text{ ise } f'\left(\frac{1}{3}\right) \text{ kaçtır?}$$

Çözüm:

$$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{\sqrt{1-4 \cdot \frac{1}{9}}} = -\frac{2}{\sqrt{\frac{5}{9}}} = -\frac{6}{\sqrt{5}} \text{ dir.}$$

Örnek:

$$f(x) = \text{Arccos}(\sin x) \text{ ise } f'(x) \text{ i bulunuz.}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = -\frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} \\ &= -\frac{\cos x}{|\cos x|} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek:

$$f(x) = 3x^2 \cdot \text{Arctan} x \text{ ise } f'(x) \text{ i bulunuz.}$$

Çözüm:

$$f(x) = 6x \cdot \text{Arctan} x + \frac{1}{1+x^2} \cdot 3x^2 \text{ dir.}$$

Örnek:

$$f(x) = \text{Arccot}(x^2) \text{ ise } f'(x) \text{ i bulunuz.}$$

Çözüm:

$$f'(x) = -\frac{2x}{1+x^4} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$$f(x) = \text{Arctan}(\cos x) \text{ ise } f'(x) \text{ i bulunuz.}$$

Çözüm:

$$f(x) = \frac{-\sin x}{1+\cos^2 x} \text{ tir.}$$

Logaritmik Fonksiyonların Türevi:

$$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u} \cdot \log_a e$$

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

Örnek:

$$1. f(x) = \log_2(x^2 - 3x + 4)$$

$$f'(x) = \frac{2x-3}{x^2 - 3x + 4} \cdot \log_2 e$$

$$2. f(x) = \log(x^2 + 4x - 5)$$

$$f'(x) = \frac{2x+4}{x^2 + 4x - 5} \cdot \log_{10} e$$

$$3. f(x) = \ln(3x + 4)$$

$$f'(x) = \frac{3}{3x + 4}$$

$$4. f(x) = \ln^3 x + \ln x^2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(\ln^2 x) \cdot \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2} \\ &= \frac{3}{x} \cdot \ln^2 x + \frac{2}{x} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$$5. y = \ln(\sin x)$$

$$y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$6. y = \ln(\cos x)$$

$$y' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

Örnek:

$$f(x) = \ln(\ln(3x+2)) \text{ ise } f'(x) \text{ i bulunuz.}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[\ln(\ln(3x+2))']}{\ln(3x+2)} \\ &= \frac{3}{\ln(3x+2)} \\ &= \frac{3}{(3x+2) \cdot \ln(3x+2)} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek:

$y = \ln(\ln(\ln x))$ ise $\frac{dy}{dx}$ türevini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\left[\ln(\ln x) \right]'}{\ln(\ln x)} \\ &= \frac{1}{\ln x} \\ &= \frac{1}{\ln(\ln x)} \\ &= \frac{x \ln x}{\ln(\ln x)} \\ &= \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot [\ln(\ln x)]} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Örnek:

$y = x^3 \cdot \ln^2 x$ ise $\frac{dy}{dx}$ türevini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 3x^2 \cdot \ln^2 x + 2 \cdot (\ln x) \frac{1}{x} \cdot x^3 \\ &= 3x^2 \cdot \ln^2 x + 2x^2 \cdot \ln x \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Örnek:

$f(x) = \frac{\ln x}{x} + x \cdot \ln x$ ise $f'(e)$ değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2} + 1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x \\ f'(x) &= \frac{1 - \ln x}{x^2} + \ln x + 1 \\ f'(e) &= \frac{1 - \ln e}{e^2} + \ln e + 1 \\ &= \frac{0}{e^2} + 1 + 1 = 2 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Üstel Fonksiyonların Türevi:

$a > 0$, $a \neq 1$ ve $u = u(x)$, $v = v(x)$ olmak üzere,

$$1. y = a^x \Rightarrow y' = a^x \cdot \ln a$$

$$2. y = a^u \Rightarrow y' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$$

$$3. y = u^v \Rightarrow \ln y = v \cdot \ln u$$

$$\frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + \frac{u'}{u} \cdot v$$

$$y' = u^v \left[v' \ln u + \frac{u'}{u} \cdot v \right]$$

$$4. y = e^x \Rightarrow y' = e^x$$

$$5. y = e^u \Rightarrow y' = u' \cdot e^u$$

Örnek:

$y = 2^{x^2} + 10^{3x+1}$ ise $\frac{dy}{dx}$ türevini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot 2^{x^2} \ln 2 + 3 \cdot 10^{3x+1} \cdot \ln 10 \text{ dur.}$$

Örnek:

$f(x) = x^3 \cdot 3^{2x}$ ise $f'(x)$ türevini bulunuz.

Çözüm:

$$f'(x) = 3x^2 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3^{2x} \ln 3 \cdot x^3 \text{ dır.}$$

Örnek:

$y = 5^{\cos x}$ ise $\frac{dy}{dx}$ türevini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \cdot 5^{\cos x} \cdot \ln 5$$

Örnek:

$f(x) = 3^{\cos x} \cdot e^{\sin x}$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

Çözüm:

$$f'(x) = -\sin x \cdot 3^{\cos x} \cdot \ln 3 \cdot e^{\sin x} + \cos x \cdot e^{\sin x} \cdot 3^{\cos x} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$f(x) = x \cdot 2^{\tan 3x}$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

Çözüm:

$$f'(x) = 1 \cdot 2^{\tan 3x} + 3 \cdot (1 + \tan^2 3x) \cdot 2^{\tan 3x} \cdot (\ln 2) \cdot x$$

Örnek:

$$y = x^2 \cdot e^{3x} \text{ ise } \frac{dy}{dx} \text{ türevini bulunuz.}$$

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot e^{3x} + 3 \cdot e^{3x} \cdot x^2 \text{ dir.}$$

Örnek:

$$f(x) = e^{x^2} \cdot \ln 3x \text{ ise } f'(1) \text{ i bulunuz.}$$

Çözüm:

$$f'(x) = 2x \cdot e^{x^2} \cdot \ln 3x + \frac{3}{3x} \cdot e^{x^2}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= 2 \cdot 1 \cdot e^1 \cdot \ln 3 + 1 \cdot e \\ &= 2e \cdot \ln 3 + e \\ &= e \cdot (2 \ln 3 + 1) \\ &= e \cdot (\ln 9 + 1) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Örnek:

$$y = x^{\cos x} \text{ ise } y' \text{ türevini bulunuz.}$$

Çözüm:

Her iki tarafın logaritması alınırsa,

$$\ln y = \cos x \cdot \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \cos x$$

$$y' = y \left[-\sin x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cos x \right]$$

$$y' = x^{\cos x} \left[-\sin x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \cos x \right] \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$$y = (3x - 2)^{5x+4} \text{ ise } y' \text{ türevini bulunuz.}$$

Çözüm:

Logaritma alınırsa,

$$\ln y = (5x + 4) \cdot \ln(3x - 2)$$

$$\frac{y'}{y} = 5 \cdot \ln(3x - 2) + \frac{3}{3x - 2} \cdot (5x + 4)$$

$$y' = (3x - 2)^{5x+4} \left[5 \cdot \ln(3x - 2) + \frac{3}{3x - 2} \cdot (5x + 4) \right]$$

bununur.

Örnek:

$$y = (\cos x)^{\sin x} \text{ ise } y' \text{ türevini bulunuz.}$$

Çözüm:

$$\ln y = \sin x \cdot \ln(\cos x)$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln(\cos x) + \frac{-\sin x}{\cos x} \cdot \sin x$$

$$y' = y [\cos x \cdot \ln \cos x - \tan x \cdot \sin x]$$

$$y' = (\cos x)^{\sin x} [\cos x \cdot \ln \cos x - \tan x \cdot \sin x]$$

bununur.

Kapalı Fonksiyonun Türevi:

$f(x, y) = 0$ şeklindeki bir bağıntıya kapalı fonksiyon denir. (Fonksiyon tanımına uygun olmayabilir.)

$$f'(x, y) = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{x \text{ e göre türev (y sabit)}}{y \text{ ye göre türev (x sabit)}}$$

Örnek:

$x^2 + y^2 = 13$ çemberinin $(-2, 3)$ noktasındaki türevi kaçtır?

Çözüm:

$$x^2 + y^2 - 13 = 0$$

$$f'(x, y) = -\frac{2x}{2y} = -\frac{-2}{3}$$

$$f'(-2, 3) = \frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$x^2 \cdot y + xy^2 + 3x + 4y - 5 = 0$ kapalı fonksiyonun türevini bulunuz.

Çözüm:

$$f'(x, y) = -\frac{2xy + y^2 + 3}{x^2 + 2yx + 4}$$

II. yol:

$$2x \cdot y + y' \cdot x^2 + 1 \cdot y^2 + 2y \cdot y' \cdot x + 3 + 4y' = 0$$

$$y' x^2 + 2yx \cdot y' + 4y' = -2xy - y^2 - 3$$

$$y'(x^2 + 2xy + 4) = -(2xy + y^2 + 3)$$

$$y' = -\frac{2xy + y^2 + 3}{x^2 + 2xy + 4} \text{ tür.}$$

Örnek:

$\cos^2 x + \sin(x+y) = 0$ ise $f'(x, y)$ türevini bulunuz.

Çözüm:

$$f'(x, y) = -\frac{2\cos x \cdot (-\sin x) + \cos(x+y)}{\cos(x+y)} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\sin^2 y + \cos^2 y + \cos xy = 0$ ise $f'(x, y)$ türevini bulunuz.

Çözüm:

$$f'(x, y) = -\frac{2\sin x \cdot \cos x - y \sin xy}{-2\cos y \sin y - x \sin xy} \text{ bulunur.}$$

Bileşke Fonksiyonunun Türevi:

$y = f(u)$, $u = g(x)$ ise $y = f(g(x))$ dir.

$$\frac{dy}{du} = f'(u) \text{ ve } \frac{du}{dx} = g'(x)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x)$$

Bu kurala türevde zincir kuralı denir.

$$y = (fog)(x) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$y = f(u)$, $u = g(t)$ ve $t = h(x)$ ise

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \\ = f'(u) \cdot g'(t) \cdot h'(x) \text{ olur.}$$

Örnek:

$y = u^4 + 3u^2$ ve $u = x^3 - 2x + 5$ ise $\frac{dy}{dx}$ türevini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = 4u^3 + 6u \text{ ve } \frac{du}{dx} = 3x^2 - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = (4u^3 + 6u) \cdot (3x^2 - 2)$$

$$= [4 \cdot (x^3 - 2x + 5)^3 + 6 \cdot (x^3 - 2x + 5)] \cdot (3x^2 - 2)$$

bununur.

Örnek:

$y = 2u^3 - 1$, $u = \sin t$ ve $t = 3x + 1$ ise $\frac{dy}{dx}$ türevini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{dy}{du} = 6u^2, \frac{du}{dt} = \cos t \text{ ve } \frac{dt}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= 6u^2 \cdot \cos t \cdot 3$$

$$= 6 \cdot u^2 \cdot \cos(3x+1) \cdot 3$$

$$= 6 \cdot \sin^2 t \cdot \cos(3x+1) \cdot 3$$

$$= 6 \cdot \sin^2(3x+1) \cdot \cos(3x+1) \cdot 3 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$g(x) = 2x^3 - x \text{ ise } (fog)'(x) \text{ i bulunuz.}$$

Çözüm:

$$(fog)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \text{ dir.}$$

$$f'(x) = 6x - 4, g'(x) = 6x^2 - 1$$

$$= (6 \cdot g(x) - 4) \cdot (6x^2 - 1)$$

$$= [6(2x^3 - x) - 4] \cdot (6x^2 - 1)$$

$$= (12x^3 - 6x - 4) \cdot (6x^2 - 1) \text{ bulunur.}$$

Örnek:

f ve g iki fonksiyon olmak üzere $g(2) = 3$, $f'(3) = 6$ ve $g'(2) = 4$ ise $(fog)'(2)$ değeri kaçtır?

Çözüm:

$$y' = (fog)'(2)$$

$$= f'(g(2)) \cdot g'(2)$$

$$= f'(3) \cdot 4$$

$$= 6 \cdot 4 = 24 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$$f(3x+2) = 2x^3 + 4x^2 + 7x \text{ ise } f'(5) \text{ değeri kaçtır?}$$

Çözüm:

$$f'(3x+2) \cdot 3 = 6x^2 + 8x + 7$$

$$x = 1 \text{ için}$$

$$f'(5) \cdot 3 = 6 + 8 + 7$$

$$f'(5) \cdot 3 = 21 \text{ ve } f'(5) = 7 \text{ dir.}$$

Örnek:

$$f(x) = x^2 - 3x + 4$$

$g(x) = x^2 + 2x - 3$ ise $(fog)'(2)$ değeri kaçtır?

Çözüm:

$$g(2) = 5$$

$$(fog)'(2) = f'(g(2)) \cdot g'(2)$$

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$= 7 \cdot 6$$

$$g'(x) = 2x + 2$$

$$= 42 \text{ dir.}$$

$$g'(2) = 4 + 2 = 6$$

$$f'(g(2)) = f'(5)$$

$$= 10 - 3$$

$$= 7$$

Parametrik Fonksiyonların Türevi:

$x = f(t)$ ve $y = g(t)$ fonksiyonları verilmiş olsun.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{y \text{ nin } t \text{ ye göre türevi}}{x \text{ in } t \text{ ye göre türevi}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_t}{x'(t)} \text{ dir.}$$

Örnek:

$$\begin{cases} x = 3t^2 - 5t + 2 \\ y = 2t^3 + 2t - t \end{cases} \text{ ise } \frac{dy}{dx} \text{ türevini bulunuz.}$$

Çözüm:

$$\frac{dy}{dt} = 6t^2 + 2$$

$$\frac{dx}{dt} = 6t - 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6t^2 + 2}{6t - 5} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$$x = t^2 - t + 2$$

$$y = 3t^3 - 4t^2 - 2t - 1$$

ise $y = f(x)$ fonksiyonunun $t = 1$ noktasında türevini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9t^2 - 8t - 2}{2t - 1}$$

$$t = 1 \text{ için } f'(2) = \frac{9 - 8 - 2}{2 - 1} = \frac{-1}{1} = -1 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$$\begin{cases} y = 3 + \cos 2t \\ x = 2 - 4 \cos 3t \end{cases} \text{ ise } \frac{dy}{dx} \text{ türevini bulunuz.}$$

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2 \cdot \sin 2t}{-4 \cdot (-3 \cdot \sin 3t)} = -\frac{\sin 2t}{6 \sin 3t} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \cdot \sin 2t \end{cases} \text{ ise } \frac{dy}{dx} \text{ türevini bulunuz.}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{e^t \cdot \sin 2t + 2 \cdot \cos 2t \cdot e^t}{e^t \cdot \cos t - \sin t \cdot e^t} \\ &= \frac{e^t (\sin 2t + 2 \cos 2t)}{e^t (\cos t - \sin t)} \\ &= \frac{\sin 2t + 2 \cos 2t}{\cos t - \sin t} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Ters Fonksiyonun Türevi:

$f: A \rightarrow B$, $y = f(x)$ birebir ve örten bir fonksiyon ise tersi vardır.

Tersi $f^{-1}: B \rightarrow A$, $x = f^{-1}(y)$ dir.

$$f^{-1}(y) = x \text{ türevi alınırsa}$$

$$(f^{-1})'(y) \cdot y' = 1$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{y'} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f(f^{-1}(y))} \text{ dir.}$$

Örnek:

$$f(x) = 5x + 7 \text{ ise } f(x) \text{ in tersinin türevini bulunuz.}$$

Çözüm:

$$f'(x) = 5$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{5} \text{ dir.}$$

II. Yol

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(x - 7) \text{ dir.}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{5} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$$f: \left[\frac{1}{2}, \infty \right) \rightarrow \mathbb{R} \text{ ve } f(x) = x^2 - x - 4 \text{ fonksiyonunun}$$

tersinin $x = 2$ noktasındaki türevi kaçtır?

Çözüm:

$$f'(x) = 2x - 1$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \text{ dir.}$$

$$y_0 = x_0^2 - x_0 - 4 = 2$$

$$x_0^2 - x_0 - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

$$-2 \notin \left[\frac{1}{2}, \infty \right) \text{ olduğu için}$$

karşılık gelen $x_0 = 3$ tür.

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{2x_0 - 1}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3 - 1} = \frac{1}{5} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$$f: \left(-\infty, \frac{3}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x - 7 \text{ fonksiyonunun}$$

tersinin $x = 3$ noktasındaki türevi kaçtır?

Çözüm:

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$x_0^2 - 3x_0 - 7 = 3$$

$$x_0^2 - 3x_0 - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 5 \\ x_0 = -2 \end{cases}$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$= \frac{1}{2x_0 - 3}, x_0 = -2 \text{ alınırsa,}$$

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{2(-2) - 3} = -\frac{1}{7} \text{ bulunur.}$$

Mutlak Değer Fonksiyonunun Türevi:

$$y = |f(x)| \Rightarrow y' = \frac{|f(x)| \cdot f'(x)}{f(x)} = \text{Sgn}(x) \cdot f'(x) \text{ dir.}$$

$f(a) = 0$ için $f'(a) \neq 0$ ise türevi yoktur.

$f(a) = 0$ için $f'(a) = 0$ ise türev sıfırdır.

Örnek:

$f(x) = |x^2 - 5x + 7|$ ise $f'(2)$ değeri kaçtır?

Çözüm:

$$x = 2 \text{ için } x^2 - 5x + 7 > 0$$

$$f'(x) = + (2x - 5)$$

$$f(2) = + (4 - 5) = -1 \text{ dir.}$$

Örnek:

$f(x) = |x^2 + 8x - 4|$ ise $f'(-3)$ değeri kaçtır?

Çözüm:

$$x = -3 \text{ için } x^2 + 8x - 4 < 0$$

$$f'(x) = - (2x + 8)$$

$$f'(-3) = - (-6 + 8) = -(2) = -2 \text{ dir.}$$

Örnek:

$f(x) = |x^2 - 9|$ ise $f'(3)$ değerini bulunuz.

Çözüm:

$$x = 3 \text{ için } f(3) = 0$$

$$f'(x) = 2x$$

$f'(3) = 6 \neq 0$ olduğu için $x = 3$ de türevi yoktur.

($x = 3$ fonksiyonun bir kırılma noktasıdır, sağdan ve soldan türevler farklıdır.)

Örnek:

$f(x) = |x^2 - 4x + 4|$ ise $f'(2)$ değerini bulunuz.

Çözüm:

$$f(2) = 0$$

$f'(x) = 2x - 4$ ve $f'(2) = 0$ olduğuna göre $x = 2$ deki türevi sıfırdır.

Tamdeğer ve İşaret Fonksiyonunun Türevi:

İşaret ve tamdeğer fonksiyonlarının sürekli oldukları noktalarda türevleri var ve sıfırdır. Süreksiz oldukları noktalarda ise türevleri yoktur. Kritik noktalarda sağdan ve soldan türevlere bakılır.

Örnek:

1. $f(x) = [2x + 7]$ ise $f'(3)$ nedir?

$x = 3$ için fonksiyon sürekli değil, $f'(3)$ yoktur.

2. $f(x) = [3x + 5]$ ise $f'\left(\frac{3}{2}\right)$ kaçtır?

$x = \frac{3}{2}$ fonksiyonu sürekli $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ dir.

3. $f(x) = \text{Sgn}(x + 7)$ ise $f'(3)$ kaçtır?

$x = 3$ de fonksiyon sürekli $f'(3) = 0$

4. $f(x) = \text{Sgn}(x^2 - 9)$ fonksiyonunun $f'(-3)$ değerini bulunuz.

$x = -3$ de fonksiyon sürekli değildir. $f'(-3)$ yoktur.

Ardışık Türevler (Yüksek Dereceden Türevler):

f: A → R tanımlı ve $y = f(x)$ olsun.

1. türev $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$

2. türev $y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$

3. türev $y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$

.....

n. türev $y^n = f^n(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$ dir.

Ornek:

$y = x^4 - 3x^3 + 4x - 7$ ise 4. türevi kaçtır?

Çözüm:

$$y' = 4x^3 - 9x^2 + 4$$

$$y'' = 12x^2 - 18x$$

$$y''' = 24x - 18$$

$$y^{IV} = 24$$
 bulunur.

Ornek:

$y = e^{3x}$ in 20. türevini bulunuz.

Çözüm:

$$y' = 3 \cdot e^{3x}$$

$$y'' = 3^2 \cdot e^{3x}$$

$$y''' = 3^3 \cdot e^{3x}$$

.....

$$y^{20} = 3^{20} \cdot e^{3x}$$
 bulunur.

Örnek:

$y = \frac{1}{x}$ in n. türevini bulunuz.

Çözüm:

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$$
 dir.

$$y' = -1 \cdot x^{-2}$$

$$y'' = (-1) \cdot (-2) \cdot x^{-3}$$

$$y''' = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4}$$

.....

$$y^n = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}$$
 bulunur.

Örnek:

$y = \frac{1}{3x-1}$ in n. türevini bulunuz.

Çözüm:

$$y = (3x-1)^{-1}$$

$$y' = -1 \cdot 3 \cdot (3x-1)^{-2}$$

$$y'' = 1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot (3x-1)^{-3}$$

$$y''' = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3^3 \cdot (3x-1)^{-4}$$

.....

$$y^n = (-1)^n \cdot n! \cdot 3^n \cdot (3x-1)^{-(n+1)}$$
 bulunur.

UYARI:

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f^n = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f^n = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$
 dir.

TÜREVİN UYGULAMALARI:

L'Hospital Kuralı:

Limitte $\frac{0}{0}$ ve $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliklerinde kullanılır.

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ ise pay ve paydanın ayrı

ayrı türevleri alınır yine belirsizlik varsa bu işleme devam edilir.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = L \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0}$$
 ise

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{f''(a)}{g''(a)} = L \in \mathbb{R}$$
 oluyorsa limit L dir.

Örnek:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 4x^2 - 3x + 5}{x^3 - 1}$$

değeri kaçtır?

Çözüm:

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 8x - 3}{3x^2}$$

$$= \frac{6-8-3}{3} = -\frac{5}{3}$$

Örnek:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 3x}{x + \tan x}$$

ifadesinin eşiti kaçtır?

Çözüm:

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-3 \cdot \cos 3x}{1+1+\tan^2 x} = \frac{2-3 \cdot 1}{1+1+0}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

bulunur.

Örnek:

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{2-2 \cdot \ln x}{x-e}$$

ifadesinin eşiti kaçtır?

Çözüm:

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{0-2 \cdot \frac{1}{x}}{1-0} = \frac{-2}{e} = -\frac{2}{e}$$

bulunur.

Örnek:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x-2}-x}{2x^2-3x+1}$$

ifadesinin eşiti kaçtır?

Çözüm:

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \cdot e^{2x-2}-1}{4x-3} = \frac{2 \cdot e^0-1}{4-3}$$

$$= \frac{2-1}{1} = 1$$

bulunur.

Örnek:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+5x-7}{e^x+x}$$

ifadesinin eşti kaçtır?

Çözüm:

$\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+5}{e^x+1} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

bulunur.

Örnek:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+2x-2\sin x}{x^2}$$

ifadesinin eşti kaçtır?

Çözüm:

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2+2-2 \cdot \cos x}{2x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x+0+2 \cdot \sin x}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

bulunur.

Örnek:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos x}{e^{2x}-1}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \cos x - x \cdot \sin x}{2 \cdot e^{2x}}$$

$$= \frac{\cos 0 - 0 \cdot \sin 0}{2 \cdot e^0} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$$

dir.

Örnek:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 2^x}{2x}$$

ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm:

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x \cdot \ln 5 - 2^x \cdot \ln 2}{2} = \frac{5^0 \cdot \ln 5 - 2^0 \cdot \ln 2}{2}$$

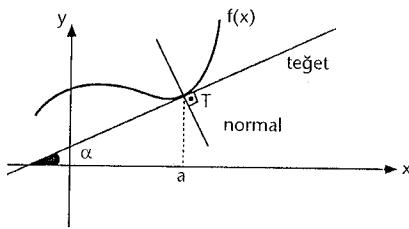
$$= \frac{\ln 5 - \ln 2}{2} = \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2)$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$$

bulunur.

Türevin Geometrik Yorumu:

Bir fonksiyonun $x = a$ noktasındaki türevi, $x = a$ apsisli noktadan çizilen teğetinin eğimini verir.



$$m_T = f'(a) = \tan \alpha \rightarrow \text{teğetin eğimi}$$

$$m_N = -\frac{1}{f'(a)} = -\frac{1}{m_T} \rightarrow \text{normalin eğimi}$$

Teğet Denklemi:

$$y - f(a) = m_T (x - a)$$

Normal Denklemi:

$$y - f(a) = m_N (x - a) \text{ dır.}$$

Örnek:

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasında çizilen teğetinin eğimi kaçtır?

Çözüm:

$x = 2$ noktasındaki türevi teğetinin eğimini verir.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$$

$$f'(2) = 3 \cdot 4 - 8 \cdot 2 + 5$$

$$= 12 - 16 + 5 = 1 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki teğet denklemini bulunuz.

Çözüm:

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$$

$$f'(x) = 6x^2 - 2x$$

$$f'(1) = 6 - 2 = 4$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 1 + 1 = 2$$

$$m_T = 4 \text{ ve } T(1,2) \text{ dir.}$$

$$y - y_0 = m_T(x - x_0)$$

$$y - 2 = 4(x - 1)$$

$$y - 2 = 4x - 4$$

$$y = 4x - 2 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$f(x) = x^2 - 8x + 4$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki normal denklemini bulunuz.

$$f'(x) = 2x - 8$$

$$f'(2) = 2 \cdot 2 - 8 = -4$$

$$m_N = -\frac{1}{f'(2)} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$f(2) = 4 - 16 + 4 = -8$$

$$T(2, -8)$$

$$y - y_0 = m_N(x - x_0)$$

$$y + 8 = \frac{1}{4}(x - 2)$$

$$4y + 32 = x - 2$$

$$x - 4y - 34 = 0 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$f(x) = \sin^2 x$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{4}$ noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.

Çözüm:

$$f'(x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4}$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$f(x) = x^3 - ax + 4$ fonksiyonunun $x = -2$ apsisli noktadan çizilen teğeti, $2x - 3y + 4 = 0$ doğrusuna平行 ise a kaçtır?

Çözüm:

$$f'(x) = 3x^2 - a$$

$$f'(-2) = 12 - a$$

$$2x - 3y + 4 = 0$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}, m = \frac{2}{3}$$

iki doğru paralelse eğimleri eşittir.

$$12 - a = \frac{2}{3}$$

$$36 - 3a = 2$$

$$3a = 34$$

$$a = \frac{34}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$f(x) = x^2 - mx + 2$ eğrisi üzerindeki $x = 1$ ve $x = 2$ apsisli noktalardan çizilen teğetler birbirine dik ise m kaçtır?

Çözüm:

$$f'(x) = 2x - m$$

$f'(1) = 2 - m$ ve $f'(2) = 4 - m$ iki doğru birbirine dik ise eğimleri çarpımı (-1) dir.

$$(2 - m)(4 - m) = -1$$

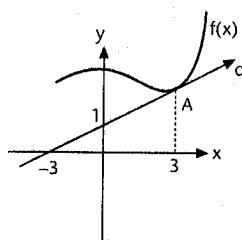
$$8 - 2m - 4m + m^2 = -1$$

$$m^2 - 6m + 9 = 0$$

$$(m - 3)^2 = 0 \text{ ve } m = 3 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

Şekildeki d doğrusu A noktasında, fonksiyona teğettir. $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ olduğuna göre $g'(3)$ değeri kaçtır?

**Çözüm:**

d doğrusunun eğimi $m = \tan \alpha = \frac{1}{3}$ d nin denklemi $y = mx + n$ 'den $y = \frac{1}{3}x + 1$ dir. A noktasının ordinatı $x = 3$ için $y = 2$ ve $A(3, 2)$ 'dir.

$$g'(x) = \frac{f'(x)x - 1.f(x)}{x^2} \Rightarrow g'(3) = \frac{f'(3).3 - f(3)}{3^2}$$

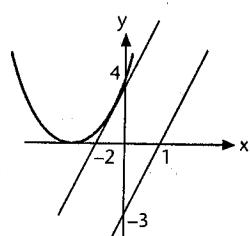
$$g'(3) = \frac{\frac{1}{3}.3 - 1.2}{3^2} = \frac{-1}{9} \text{ dur.}$$

Örnek:

$f(x) = (x + 2)^2$ parabolünün $3x - y - 3 = 0$ doğrusuna en yakın noktasının ordinatı kaçtır?

Çözüm:

Parabolün $y = 3x - 3$ doğrusuna paralel teğetinin değme noktası en yakın noktadır. Bu noktadaki türev teğetin eğimine eşittir.



$$y' = 2(x + 2), m_T = 3$$

$$2(x + 2) = 3$$

$$x + 2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

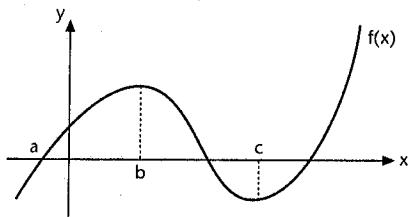
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2} + 2\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \text{ tür.}$$

Artan ve Azalan Fonksiyonlar:

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ve her $x_1, x_2 \in (a, b)$ için

* $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa f , (a, b) aralığında artandır. Artan olduğu aralıkta $f'(x) > 0$ dir.

* $x_1 < x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa f , (a, b) aralığında azalandır. Azalan olduğu aralıkta $f'(x) < 0$ dir.



$(-\infty, b) \rightarrow f(x)$ artan, $f'(x) > 0$

$(b, c) \rightarrow f(x)$ azalan, $f'(x) < 0$

$(c, \infty) \rightarrow f(x)$ artan, $f'(x) > 0$ dir.

Örnek:

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 24x + 12$ fonksiyonunun artan

ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

Çözüm:

$$f'(x) = \frac{1}{3}3x^2 - 2x - 24$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$(x - 6)(x + 4) = 0$$

$$x = 6 \text{ ve } x = -4$$

x	$-\infty$	-4	6	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0

$(-\infty, -4) \rightarrow f$ artan

$(-4, 6) \rightarrow f$ azalan

$(6, \infty) \rightarrow f$ artandır.

Örnek:

$f(x) = x^3 - x^2 + (m+1)x + 4$ fonksiyonunun daima artan olması için m ne olmalıdır?

Çözüm:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + m + 1 > 0$$

Daima artan olması için $\Delta < 0$ olmalıdır.

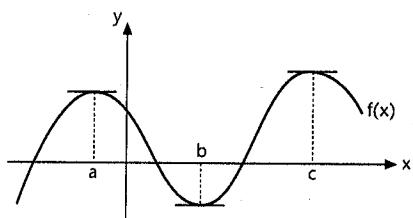
$$\Delta = 4 - 4 \cdot 3 \cdot (m+1) < 0$$

$$4 - 12m - 12 < 0$$

$$-8 < 12m \text{ ve } m > -\frac{2}{3} \text{ tür.}$$

Fonksiyonların Maksimum ve Minimum Noktaları:

$f(x)$ fonksiyonunda 1. türevi sıfır eşit yapan noktalarda türevin işaretini değişıyorsa, fonksiyonun yerel maksimum ve yerel minimum noktalarıdır.



$f'(a) = 0$ ve $x = a$ yerel maksimum noktası

$f'(b) = 0$ ve $x = b$ yerel minimum noktası

$f'(c) = 0$ ve $x = c$ yerel maksimum noktalarıdır.

* Maksimum ve minimum noktalarına ekstremum noktaları da denir.

Örnek:

$$f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 30x + 4 \text{ fonksiyonun ekstre-} \\ \text{mum noktalarını bulunuz.}$$

Çözüm:

$$f'(x) = 3x^2 - 9x - 30$$

$$3x^2 - 9x - 30 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ ve } x = -2$$

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0

$x = -2$, maksimum noktasıdır.

$x = 5$, minimum noktasıdır.

Örnek:

$f(x) = x^3 - (m-1)x^2 + 8x + 4$ fonksiyonunda $x = 2$ bir minimum noktası ise m kaçtır?

Çözüm:

$$f'(x) = 3x^2 - 2(m-1)x + 8$$

$$3 \cdot 2^2 - 2(m-1) \cdot 2 + 8 = 0$$

$$12 - 4(m-1) + 8 = 0$$

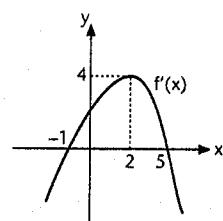
$$20 = 4(m-1)$$

$$5 = m - 1$$

$$m = 6 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

Şekilde $f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir. $f(x)$ hangi noktada maksimum değerini alır?

**Çözüm:**

Türev fonksiyonu türev tablosuna yerleştirilirse

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$
$f'(x)$	--	0	++	0

$x = -1$ noktası minimum noktası

$x = 5$ noktası maksimum noktasıdır.

Örnek:

$$f(x) = \frac{5x+4}{2x+3} \text{ fonksiyonunun maksimum ve mini-} \\ \text{mum noktalarını araştırınız.}$$

Çözüm:

$$f'(x) = \frac{5 \cdot (2x+3) - 2(5x+4)}{(2x+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{10x+15-10x-8}{(2x+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{7}{(2x+3)^2} > 0$$

olduğu için $f'(x) = 0$ yapan nokta yoktur. Fonksiyon tanımlı olduğu aralıktır. Maksimum ve minimum noktası yoktur.

Çözüm:

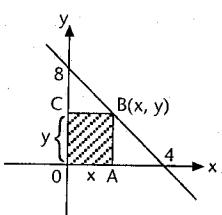
$$f'(x) = 2x - 8 = 0$$

$$x = 4$$

$$f(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 5 = 16 - 32 + 5 = -11 \text{ bulunur.}$$

Ornek:

Şekilde OABC dikdörtgeninin alanı en fazla kaç br^2 olur?



Çözüm:

$$\text{Doğru denklemi } \frac{x}{4} + \frac{y}{8} = 1 \text{ den } y = -2x + 8 \text{ dir.}$$

Alan fonksiyonu: $A(x) = x \cdot y$

$$A(x) = x \cdot (-2x + 8)$$

$$A(x) = -2x^2 + 8x$$

$$A'(x) = -4x + 8 = 0 \text{ için}$$

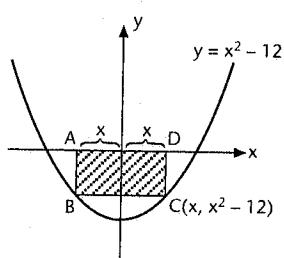
$$x = 2 \text{ dir.}$$

$$A(x) = x(-2x + 8)$$

$$= 2 \cdot (-2 \cdot 2 + 8) = 2 \cdot 4 = 8 \text{ br}^2 \text{ dir.}$$

Ornek:

$f(x) = x^2 - 12$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. ABCD dikdörtgeninin alanı maksimum olduğuna göre alanı kaç br^2 dir.



Çözüm:

Alan fonksiyonu:

$$A(x) = 2x \cdot (12 - x^2) = -2x^3 + 24x$$

$$A'(x) = -6x^2 + 24 = 0$$

$$x^2 = 4 \text{ ve } x = \pm 2 \text{ dir.}$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-

min max

$x = 2$ maksimum noktasıdır.

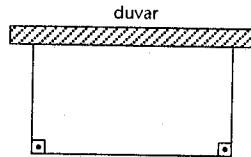
$$A(x) = 2x(12 - x^2)$$

$$= 2 \cdot (2)(12 - 4)$$

$$= 4 \cdot (8) = 32 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

Ornek:

Şekilde bir kenarı duvar olan dikdörtgen şeklindeki bir bahçenin 3 kenarına 3 sıra tel çekilmişdir. Kullanılan telin uzunluğu 120 m olduğuna göre bahçenin alanı en fazla kaç m^2 dir?



Çözüm:

Bir sıra tel 40 metredir.

$$(x) = x \cdot (40 - 2x)$$

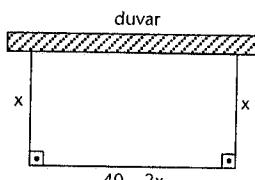
$$A(x) = 40x - 2x^2$$

$$A'(x) = 40 - 4x = 0$$

$$x = 10 \text{ bulunur.}$$

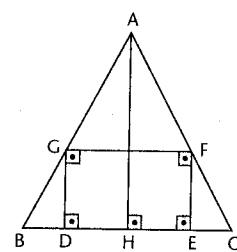
$$A(x) = x \cdot (40 - 2x)$$

$$= 10 \cdot (40 - 20) = 200 \text{ m}^2 \text{ bulunur.}$$



Ornek:

Tabanı $IBCI = 16 \text{ cm}$ ve yüksekliği $IAHI = 12 \text{ cm}$ olan bir ikizkenar üçgenin içine $(DEFG)$ dikdörtgeni çiziliyor. Maksimum alanlı dikdörtgenin alanı kaç br^2 dir?



Çözüm:

$$|KHI| = x \text{ ve } |AKI| = 12 - x$$

$$\triangle AGF \sim \triangle ABC$$

$$\frac{12-x}{12} = \frac{|GF|}{16}$$

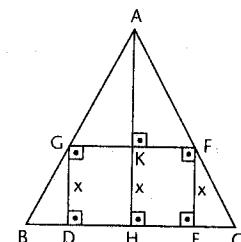
$$|GF| = \frac{4}{3}(12-x)$$

$$A(x) = x \cdot \frac{4}{3}(12-x)$$

$$= 16x - \frac{4}{3}x^2$$

$$A'(x) = 16 - \frac{8}{3}x = 0$$

$$\Rightarrow x = 6$$



$$A(x) = 16 \cdot 6 - \frac{4}{3} \cdot 36$$

$$= 96 - 48$$

$$= 48 \text{ br}^2 \text{ dir.}$$

Örnek:

$x^2 - (m-1)x - 4 = 0$ denkleminin köklerinin kareleri toplamının en küçük olması için m ne olmalıdır?

Çözüm:

Kökler x_1 ve x_2 olsun.

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$

$$T(m) = (m-1)^2 - 2 \cdot (-4)$$

$$T(m) = m^2 - 2m + 9$$

$$T'(m) = 2m - 2 = 0, m = 1$$

$$T''(m) = 2 > 0$$

olduğu için denklemin köklerinin kareleri toplamı $m = 1$ de en küçük olur.

Fonksiyonların Grafikleri:

Grafik çizilirken aşağıdaki sıra takip edilir.

1. Fonksiyonun en geniş tanım aralığı bulunur.
2. Fonksiyonun 1. türevi hesaplanır. Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklar ve ekstramum noktaları belirlenir.
3. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ hesaplanır. Fonksiyonun hangi bölgeden gelip hangi bölgeye gittiği belirlenir.
4. x ve y eksenlerinin kesim noktaları bulunur.
5. Varsa asimtotlar bulunur.
6. Değişim tablosu düzenlenerek grafik çizilir.

Asimtotlar:

$y = f(x)$ fonksiyonu için $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x)) = 0$ olursa $y = g(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ in asimtotu denir.

a) Yatay Asimtot:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$ oluyorsa, $y = c$ yatay asimtottudur.

b) Eğik veya Eğri Asimtot:

Rasyonel bir fonksiyonda payın derecesi paydanın derecesinden büyükse, eğik ya da eğri asimtot vardır. Asimtot pay, paydaya bölünerek bulunur.

Asimtot, $y = mx + n$ ise,

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] \text{ ile bulunur.}$$

c) Düşey Asimtot:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ oluyorsa $x = a$ doğrusu düşey asimtottudur. Rasyonel fonksiyonlarda düşey asimtot paydaçı sıfıra eşit yapan değerlerdir.

Örnek:

$f(x) = \frac{4x^2 - 3x + 4}{x^2 - 4}$ fonksiyonunun asimtotlarını bulunuz.

Çözüm:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2 - 3x + 4}{x^2 - 4} = 4$$

$y = 4$ doğrusu yatay asimtottudur.

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \mp 2 \Rightarrow x = 2$ ve $x = -2$ doğruları düşey asimtottudur.

Örnek:

$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x - 1}$ fonksiyonunun asimtotlarını bulunuz.

Çözüm:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$ olduğu için yatay asimtot yoktur.

$$\begin{array}{c} 2x^2 - 3x + 5 \\ \hline 2x^2 \pm 2x \\ \hline -x + 5 \\ \hline \pm x \pm 1 \\ \hline 4 \end{array}$$

$f(x) = 2x - 1$ doğrusu eğik asimtotudur.

$x - 1 = 0$ ise $x = 1$ doğrusu düşey asimtottudur.

Örnek:

$f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + 5x + 1}{x - 2}$ fonksiyonunun asimtotlarını bulunuz.

Çözüm:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ yatay asimtot yoktur.

$$\begin{array}{c} 3x^3 - 2x^2 + 5x + 1 \\ \hline 3x^3 \pm 6x^2 \\ \hline 4x^2 + 5x + 1 \\ \hline 4x^2 \pm 8x \\ \hline 13x + 1 \\ \hline -13x \pm 26 \\ \hline 27 \end{array}$$

$y = 3x^2 + 4x + 13$ parabolü eğri asimtotturdur.

$x - 2 = 0$ için $x = 2$ düşey asimtotturdur.

Polinom Fonksiyonlarının Grafikleri:

Polinom fonksiyonlar $(-\infty, +\infty)$ aralığında tanımlı ve asimtotları yoktur.

Örnek:

$f(x) = x^3 - 4x$ fonksiyonunun değişiminin inceleyip grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 - 4x) = \mp\infty$$

Fonksiyon III. bölgeden gelip I. bölgeye gider.

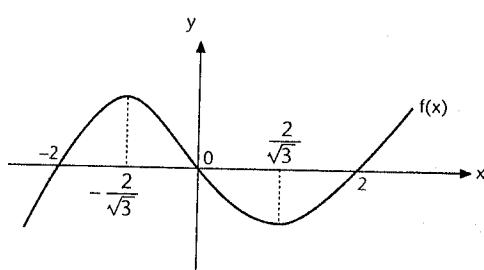
$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$$

eksenlerin kesim noktalarıdır.

$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \quad x = \mp \frac{2}{\sqrt{3}}$$

maksimum ve minimum noktalarıdır.

x	$-\infty$	-2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$+\infty$
y'	++	0	-	-	0	+	
y	$-\infty$	0	max	0	min	0	$+\infty$



Örnek:

$f(x) = (x+1)(x-2)^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = \mp\infty$$

$$f'(x) = 1 \cdot (x-2)^2 + 2 \cdot (x-2) \cdot (x+1) = 0$$

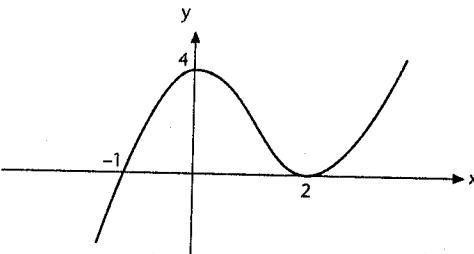
$$(x-2) \cdot [x-2+2x+2] = 0$$

$$(x-2) \cdot 3x = 0$$

$x=2, x=0$ ekstremum noktalarıdır.

$$\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
y'	+	+	0	-	+++
y	$-\infty$	0	4	0	$+\infty$



* $(x \pm a)^2$ şeklinde tam kare çarpanı bulunan fonksiyon a noktasında x eksenine teğettir.

Örnek:

$f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-1)^2$ grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = +\infty$$

Fonksiyon II. bölgeden gelip I. bölgeye gider.

$$f'(x) = 2 \cdot (x+2) \cdot (x-1)^2 + 2 \cdot (x-1) \cdot (x+2)^2$$

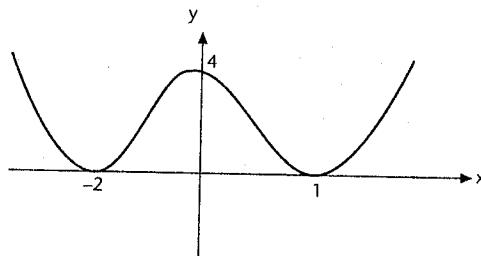
$$2 \cdot (x+2) \cdot (x-1) \cdot (x-1+x+2) = 0$$

$$(x+2) \cdot (x-1) \cdot (2x+1) = 0$$

$$x = -2, x = 1, x = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$
y'	---	0	+	0	--	++
y	$+\infty$	0	$\frac{81}{16}$	4	0	$+\infty$



Örnek:

$y = x^3$ grafiğini çiziniz.

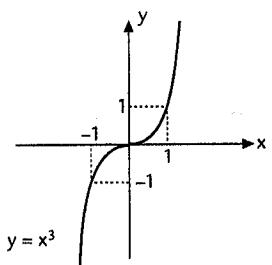
Çözüm:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \mp\infty$$

$$y' = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+	+	+
y	$-\infty$	0	$+\infty$

**Rasyonel Fonksiyonların Grafikleri:****Örnek:**

$f(x) = \frac{x-3}{x+1}$ fonksiyonunun değişimini inceleyip grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-3}{x+1} = 1$$

$y = 1$ yatay asimtottur.

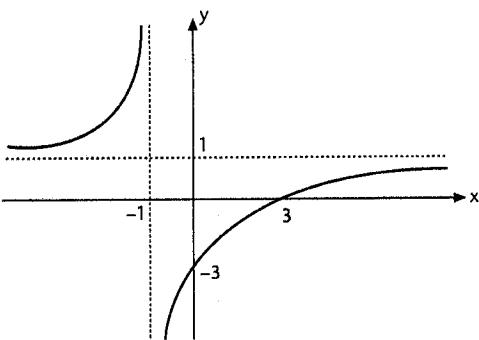
$x+1=0, x=-1$ düşey asimtottur.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - 1 \cdot (x-3)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2} > 0 \text{ fonksiyon artandır.}$$

$\begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ eksenlerinin kesim noktalarıdır.

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$
y'	+	+	+	+	+
y	1	$+\infty^-$	-3	0	1



* Asimtotlarda eğrinin kolları sonsuza doğru gider.

Örnek:

$f(x) = \frac{2x^2 + 4x - 16}{x^2 + 2x - 3}$ fonksiyonunun değişimini inceleyip grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$$

$y = 2$ yatay asimtottur.

$y = 0$ için

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{16}{3} \end{cases} \quad 2x^2 + 4x - 16 = 0 \quad \begin{cases} x=-4 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

$$(x+4)(x-2)=0$$

Eksenlerin kesim noktalarıdır.

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1)=0$$

$x = -3, x = 1$ düşey asimtotтур.

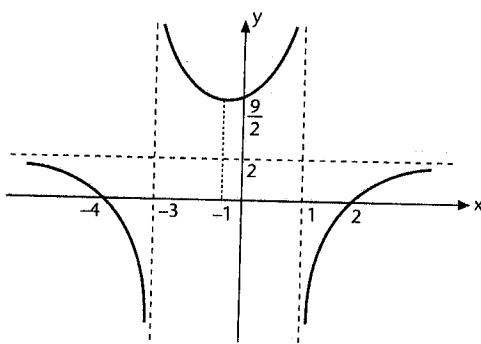
$$y' = \frac{(4x+4)(x^2+2x-3) - (2x+2)(2x^2+4x-16)}{P^2}$$

$$y' = \frac{(4x+4)(x^2+2x-3-x^2-2x+8)}{P^2} = 0$$

$$(4x+4) \cdot 5 = 0, x = -1$$

Ekstremum noktasıdır.

x	$-\infty$	-4	-3	-1	1	2	$+\infty$
y'	---	--	0	+	+	+	+
y	2	0	$-\infty^+$	$\frac{9}{2}$	$+\infty^-$	0	2

**Örnek:**

$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = \mp\infty$$

$x + 1 = 0, x = -1$ düşey asimtot

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x \\ x^2 + x \\ \hline -4x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4x - 4 \\ \hline 4 \end{array} \quad y = x - 4 \text{ eğik asimtot}$$

$$\begin{pmatrix} x=0 \\ y=0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x=3 \\ y=0 \end{pmatrix} \text{ eksenlerin kesim noktalarıdır.}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-3).(x+1)-1.(x^2-3x)}{P^2}$$

$$= \frac{2x^2-x-3-x^2+3x}{P^2}$$

$$= \frac{x^2+2x-3}{P^2} = 0$$

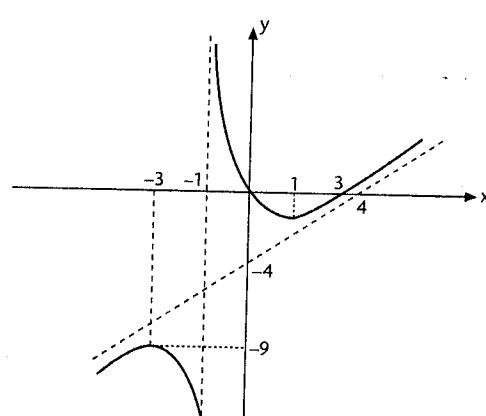
$$x^2+2x-3=0$$

$$(x+3).(x-1)=0$$

$$x=-3 \text{ ve } x=1$$

$$\begin{pmatrix} x=1 \\ y=-1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x=-3 \\ y=-9 \end{pmatrix}$$

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
y'	+	+	0	-		-	+
y	$-\infty$	-9	$-\infty$	0	-1	0	$+\infty$

**Örnek:**

$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$$\frac{1+x}{1-x} \geq 0 \text{ tanımlıdır.}$$

$-1 \leq x < 1$ aralığında tanımlıdır.

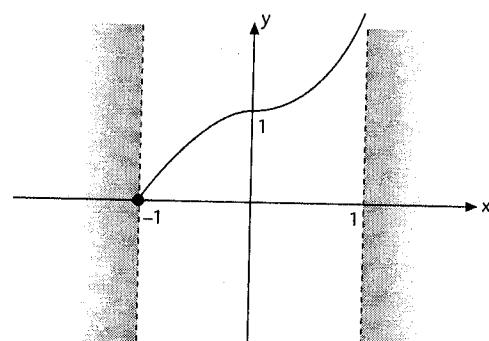
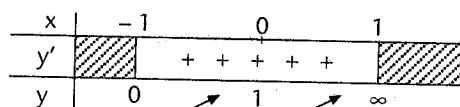
$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = \text{tanımsız}$$

$$\begin{pmatrix} x=0 \\ y=1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x=-1 \\ y=0 \end{pmatrix}$$

$1-x=0, x=1$ düşey asimtot

$$y' = \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{2\sqrt{y}} = \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2\sqrt{y}} > 0$$

fonksiyon artandır.



Örnek:

$y = e^x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

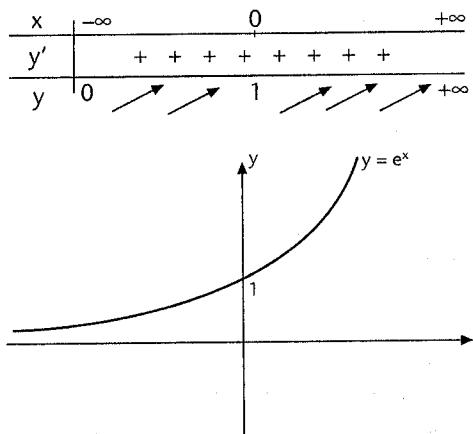
Çözüm:

Fonksiyon $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlıdır.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \quad y' = e^x > 0$$

her yerde artandır.

**Örnek:**

$y = \ln x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

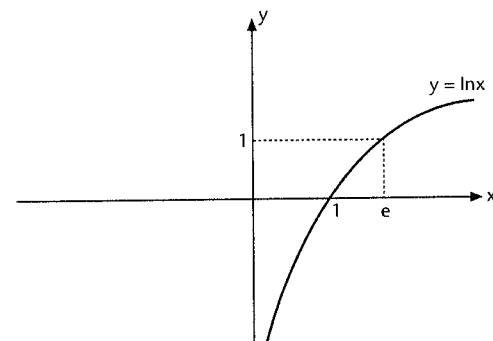
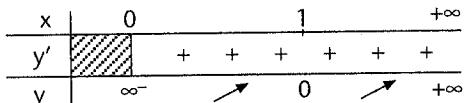
Çözüm:

$x > 0$ için tanımlıdır.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=e \\ y=1 \end{cases} \quad y' = \frac{1}{x} > 0$$

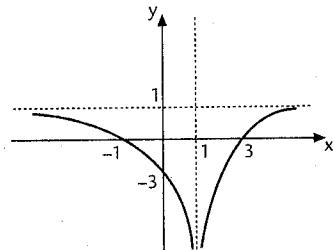
her yerde artandır.

**Grafik Okuma:**

1. Eksenlerin kestiği noktalara bakılır.
2. Varsa asimtotlara bakılır.
3. $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x)$ e bakılır. (Fonksiyonun hangi bölgeden gelip hangi bölgeye gittiği bulunur.)
4. Eğri üzerinde bilinen noktalar varsa bu noktaların fonksiyonu sağlayıp sağlamadığına bakılır.
5. Payında $(x - a)^2$ gibi tam kare çarpanı varsa $x = a$ noktasında eğri x eksenine teğettir.
6. Paydada $(x - a)^2$ gibi tam kare çarpanı varsa eğri $x = a$ noktasında baca yaparak her iki taraftan sonsuza gider.
7. Türeve bakılarak artan ve azalan olduğu aralıklar belirlenir.

Örnek:

Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?



A) $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x - 1)^2}$

B) $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$

C) $y = \frac{(x - 3).(x + 1)}{x - 1}$

D) $y = \frac{x - 3}{(x - 1)^2}$

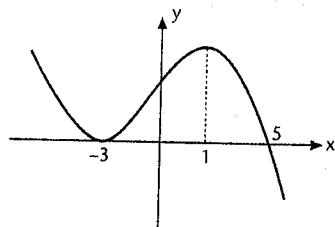
E) $y = \frac{(x + 3).(x + 1)}{x - 1}$

Çözüm:

Paydada $(x - 1)^2$ çarpanı olmalıdır. $x = 1$ de asimtotlar baca yapmaktadır. C ve E olmaz. $x = 0$ için y eksenini -3 noktasında kesmektedir (Hepsi uymaktadır.) x eksenini -1 ve 3 noktalarında kestiği için payında $(x + 1)(x - 3)$ çarpanı bulunmalıdır. O hâlde doğru cevap B dir.

Örnek:

Grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisi olabilir?



- A) $y = (x+3).(x-5)$ B) $y = (x+3)^2.(x-5)$
 C) $y = (x+3)^2.(5-x)$ D) $y = (x+3).(x-5)^2$
 E) $y = (x+3)^2.(x+5)$

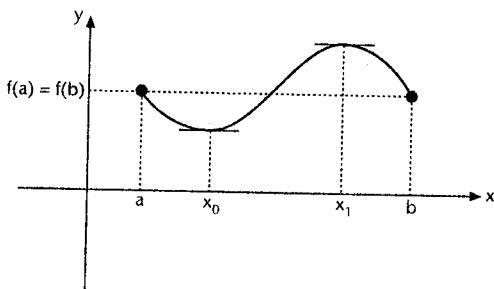
Çözüm:

$x = -3$ te grafik, ox eksenine teğettir o hâlde $(x+3)^2$ çarpanı vardır. A ve D şıkları olamaz. x ekseninin diğer kesim noktası 5 tir. O hâlde $(x-5)$ veya $(5-x)$ çarpanı olmalıdır. O hâlde E şıkları da elenir.

$x = 0$ için $f(0) > 0$ dır. O hâlde doğru cevap C dir.

Rolle Teoremi:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevli, $f(a) = f(b)$ ise enaz bir $x_0 \in (a, b)$ için $f'(x_0) = 0$ dır.

**Örnek:**

$f: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = x^2 + x - 6$ fonksiyonu için rolle teoremini sağlayan x_0 noktası kaçtır?

Çözüm:

$$f(-3) = 0$$

$$f(2) = 0$$

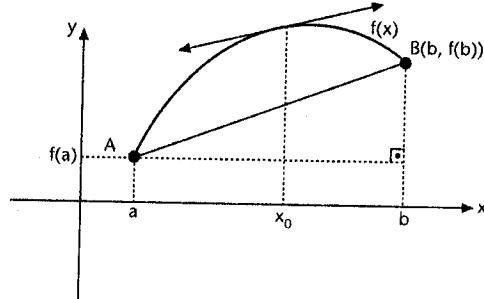
$$f'(x) = 2x + 1$$

$$f'(x_0) = 2x_0 + 1 = 0, \quad x_0 = -\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Ortalama Değer Teoremi:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevli ise enaz bir $x_0 \in (a, b)$ için

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ dır.}$$



$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ ve } m_{AB} = f'(x_0) \text{ dır.}$$

Örnek:

$f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^2 - 2x - 3$ fonksiyonunda A(-1, 0), B(5, 12) noktalarından geçen doğruya paralel olan teğetin değme noktasının apsisini kaçtır?

Çözüm:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{12 - 0}{5 - (-1)} = 2$$

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$f'(x_0) = 2x_0 - 2$$

$$2x_0 - 2 = 2$$

$$2x_0 = 4$$

$$x_0 = 2 \text{ bulunur.}$$

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ ise $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ değeri kaçtır?
 A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 16

2. $f(x) = x \cdot (x-2)^3$ ise $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h}$ değeri kaçtır?
 A) 45 B) 48 C) 56 D) 64 E) 72

3. $f(x) = (2x-3)^4 \cdot (3x+2)$ ise $f'(1)$ değeri kaçtır?
 A) -37 B) -30 C) -17 D) 16 E) 36

4. $f(x) = \frac{(3x+1)^3}{(2x+3)^2}$ ise $f'(-1)$ değeri kaçtır?
 A) -24 B) -8 C) 24 D) 28 E) 68

5. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+6}+1}$ fonksiyonu için $f'(3)$ kaçtır?
 A) $\frac{1}{72}$ B) $\frac{1}{48}$ C) $\frac{1}{16}$ D) 16 E) 36

6. $f(x) = \left(\frac{2x+1}{x-3}\right)^3$ ise $f'(2)$ değeri kaçtır?
 A) 450 B) 225 C) -175 D) -525 E) -750

7. $f(x) = (\sqrt{x-1}+2)(\sqrt{x+4}-1)$ ise $f'(5)$ değeri kaçtır?
 A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{7}{6}$ D) $\frac{8}{5}$ E) $\frac{9}{4}$

8. $f(x) = x \cdot \text{Sgn}x + x^2 \cdot \llbracket x \rrbracket$ ise $f\left(\frac{5}{2}\right)$ değeri kaçtır?
 A) 0 B) 4 C) 8 D) 11 E) 15

9. $f(x) = \sin^2 2x - \cos^2 2x$ ise $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ değeri kaçtır?
 A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

10. $f(x) = x \cdot \sin x - x^2 \cdot \cos x$ ise $f'(\pi)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?
 A) -2π B) $-\pi$ C) 0 D) 1 E) π

11. $f(x) = \sin^2(2x+1) + \cos^2(2x+1)$ ise $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)$ değeri kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

12. $f(x) = x \cdot \ln x^2$ ise $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2 + \ln x$ B) $1 + \ln x$ C) $1 + \ln x^2$
 D) $2(1 + \ln x)$ E) $x + \ln x$

13. $f(x) = \ln^2(3x+1)$ ise $f'(1)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{3}{4} + \ln 2$ B) $\frac{3}{4} + \ln 16$ C) $3 \cdot \ln 2$
 D) $\frac{2}{3} + \ln 2$ E) $\frac{3}{4} \ln 4$

14. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ ise $f'(e)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-\frac{1}{e^3}$ B) $-\frac{1}{e^2}$ C) 1 D) e^2 E) e^3

15. $f(x) = e^{2x} \cdot (3x+1)$ ise $f'(1)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $12e$ B) $15e$ C) $8e^2$ D) $11e^2$ E) $12e^2$

16. $f(x) = x \cdot 2^{\cos x}$ ise $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\pi \ln 2$ B) $\pi^2 \ln 2$ C) $\frac{\pi}{2} \ln 2 + 1$
 D) 0 E) $1 - \frac{\pi}{2} \ln 2$

17. $f(x) = e^{\cos x}$ ise $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ değeri kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) e

18. $f(x) = x^{2x}$ ise $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x^{2x}(1 + \ln x)$ B) $2x^{2x}(1 + \ln x)$ C) $x^{2x} \cdot \ln x$
 D) $2x^{2x} \cdot \ln x$ E) $2x \cdot x^{2x-1}$

19. $f(x) = e^{\ln x}$ ise $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) x B) 1 C) $\frac{1}{x}$ D) $-\frac{1}{x}$ E) $-x$

20. $x^2 - y^2 - 3xy + x + y = 0$ fonksiyonunda $f'(2,1)$ değeri kaçtır?

- A) $-\frac{3}{5}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{2}{7}$ E) $\frac{3}{8}$

1-B	2-C	3-A	4-E	5-B	6-D	7-C	8-D	9-C	10-E
11-B	12-D	13-C	14-A	15-D	16-E	17-A	18-B	19-B	20-D

1. $f(x) = x^2 + 4x - 1$ fonksiyonu için $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ değeri kaçtır?

- A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 15

2. $f(x) = x^3 + 2x + 1$ fonksiyonu için $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ değeri kaçtır?

- A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

3. $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot (3x - 1)$ ise $f'(-2)$ değeri kaçtır?

- A) 60 B) 64 C) 66 D) 72 E) 74

4. $f(x) = \frac{3x-5}{x-1}$ ise $f'(-1)$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{5}{2}$

5. $f(x) = (2x - 1)^2 \cdot (3x + 1)$ ise $f'(2)$ değeri kaçtır?

- A) 96 B) 108 C) 111 D) 116 E) 120

6. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 7}$ fonksiyonunun $x = -3$ noktasındaki türevi kaçtır?

- A) $-\frac{9}{10}$ B) $-\frac{4}{5}$ C) $-\frac{2}{3}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

7. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 5x + 2}$ ise $f'(1)$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{7}{12}$ C) $\frac{8}{9}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{5}{4}$

8. $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}}$ ise $f'(4)$ değeri kaçtır?

- A) $-\frac{5}{3}$ B) $-\frac{7}{6}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

9. $f(x) = \sin 2x - \cos 2x$ ise $f'(0)$ değeri kaçtır?

- A) -2 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

10. $f(x) = \tan^3 2x$ ise $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)$ değeri kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 12 E) 15

11. $f(x) = \tan 4x \cdot \cot 4x$ ise $f'\left(\frac{\pi}{15}\right)$ değeri kaçtır?

A) -1 B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) 2 E) $\frac{3}{2}$

12. $f(x) = \ln(\sin x)$ fonksiyonunun tanımlı olduğu değerler için $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) $\sin x$
 D) $\tan x$ E) $\cot x$

13. $f(x) = (x+1) \cdot e^x$ fonksiyonu için $f'(0)$ kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

14. $f(x) = x \cdot e^x$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{e}$ B) e^2 C) $3e^2$ D) $\frac{1}{e^2}$ E) $\frac{1}{3}e^2$

15. $f(x) = e^x \cdot \ln x$ fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $e^x(1+\ln x)$ B) $\frac{1}{x} + \ln x$ C) $\frac{1}{x} \ln x$
 D) $e^x(\ln x)$ E) $e^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$

16. $f(x) = 4x + \ln 2x$ ise $f'(1)$ değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4
 D) 5 E) $4 + \ln 4$

17. $y = x^{\sin x}$ ise $\frac{dy}{dx}$ türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(\sin x) \cdot x^{\sin x - 1}$
 B) $y \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x\right)$
 C) $(\sin x)^x (\cos x + \ln x + \sin x)$
 D) $x^{\sin x} (\cos x + \sin x)$
 E) $y \cdot (\sin x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \cos x)$

18. $x^2 + y^2 = 25$ çemberinde $T(3, -4)$ noktasındaki teğetin eğimi kaçtır?

A) $-\frac{4}{3}$ B) $-\frac{3}{4}$ C) $-\frac{2}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

19. $f(x) = x^2 - 3x + 4$

$g(x) = x^2 + 2x - 1$ fonksiyonları için $(f \circ g)'(1)$ değeri kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

20. $f(x) = |x^2 + 16|$ fonksiyonu için $f'(3)$ kaçtır?

A) -6 B) -4 C) 2 D) 4 E) 6

1-B	2-C	3-C	4-A	5-C	6-A	7-B	8-B	9-C	10-D
11-B	12-E	13-D	14-C	15-E	16-D	17-B	18-E	19-B	20-E

1. $f(x) = (2x + 1)^2 \cdot (x - 2)^3$ fonksiyonu için $f'(0)$ değeri kaçtır?

- A) -52 B) -32 C) -20 D) -4 E) 12

2. $f(x) = 2x^3 + x^2 + \sqrt{x} - 4$ ise $f'(1)$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{5}{12}$ B) 8 C) $\frac{17}{2}$ D) $\frac{25}{2}$ E) 13

3. $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{x}$ ise $f'(2)$ kaçtır?

- A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 3 D) $\frac{7}{2}$ E) 5

4. $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 3x}$ fonksiyonunun $x = 4$ noktasındaki türevi kaçtır?

- A) $\frac{9}{2}$ B) $\frac{7}{2}$ C) 3 D) $\frac{9}{4}$ E) 2

5. $f(x) = \cos^2 x + \cos x$ ise $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ değeri kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

6. $f(x) = \frac{\sin 2x}{\tan 2x}$ fonksiyonu için $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ değeri kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

7. $f(x) = \sin(3x + \pi) + \cos(2x + \pi)$ ise $f'(\pi)$ değeri kaçtır?

- A) 3 B) 2 C) 0 D) -1 E) -2

8. $f(x) = \frac{2x - 3}{3x + 1}$ ise $f(1) + f'(1)$ toplamı kaçtır?

- A) $\frac{3}{16}$ B) $\frac{5}{16}$ C) $\frac{7}{16}$ D) 3 E) 4

9. $f(x) = 3x + \ln(x^2 + x)$ ise $f'(-2)$ değeri kaçtır?

- A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) 3 E) 4

10. $f(x) = x \cdot \ln x - x + 4$ ise $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -1 B) 0 C) $\ln x$
D) $2 + \ln x$ E) $2 - \ln x$

11. $f(x) = 2^x \cdot x^2$ ise $f'(2)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $16(1 + \ln 2)$ B) $\ln 16e^2$ C) $2\ln 2 + 1$
 D) $\ln 4e^2$ E) $1 + \ln 2$

12. $f(x) = e^x \cdot \cos 2x$ ise $f'(\pi)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 0 B) 1 C) $e^{-\pi}$ D) e^π E) e

13. $f(x) = \left(x^3 \right)^{\sin^2 x + \cos^2 x}$ ise $f'(2)$ değeri kaçtır?

- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 16

14. $f(x) = \frac{3x-4}{2x+7}$ ise $(f^{-1})'(1)$ türevi kaçtır?

- A) 15 B) 21 C) 24 D) 27 E) 29

15. $f: [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 - 4x - 10$ fonksiyonunun tersinin $x = 2$ noktasındaki türevi kaçtır?

- A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 1 D) 2 E) 4

16. $x^3 + y^2 - 2xy + 3x - 2y = 1$ bağıntısının $(1, 1)$ noktasındaki türevi kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) 2 D) 4 E) 6

17. $f(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 7x + 4$ fonksiyonu için $\frac{d^3 f}{dx^3}$

değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $12x^2 - 18x$ B) $12x + 36$ C) $24x - 18$
 D) $48x + 12$ E) 24

18. $f(x) = |x^2 - 8x + 16|$ ise $f'(4)$ değeri kaçtır?

- A) -4 B) 0 C) 4 D) 8 E) yoktur

19. $f(x) = |x^2 + 6x - 16|$ fonksiyonu için $f'(2)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 4 B) 8 C) 10 D) 12 E) yoktur

20. $f(x) = x^2 \cdot \llbracket 3x + 4 \rrbracket$ ise $f'\left(\frac{1}{4}\right)$ değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

1-C	2-C	3-B	4-D	5-B	6-E	7-A	8-C	9-B	10-C
11-A	12-D	13-D	14-E	15-A	16-C	17-C	18-B	19-E	20-B

1. $f(x) = |x^2 - 9| + \text{Sgn}(x^3 - 4x)$ fonksiyonunun türevsiz olduğu kaç nokta vardır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

2. $y = f(x)$ fonksiyonu için $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y-2} = 1$ ise $f'(3)$ değeri kaçtır?

- A) $-\frac{3}{4}$ B) $-\frac{1}{16}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) 2

3. $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x \cdot \cos x$ fonksiyonu veriliyor.

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x \cdot \sin x - \cos x$ B) $\cos x - \sin x$
 C) $\cos x + \sin x$ D) $\sin x - x \cdot \cos x$
 E) $\cos x - x \sin x$

4. $f(x) = (e^x)^{\cos x}$ ise $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{\pi}{2}$ B) π C) 2π D) $-\pi$ E) $-\frac{\pi}{2}$

5. $f: \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \rightarrow R$, $f(x) = x^2 + 5x + 4$ fonksiyonu için $(f^{-1})'(-2)$ değeri kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) $-\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

6. $f: [1, \infty) \rightarrow R$ $f(x) = x^2 - 2x + 3$ fonksiyonunun tersinin $x = 11$ noktasındaki türevi kaçtır?

- A) $-\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{10}$ E) $\frac{1}{12}$

7. $f(3x - 1) = x^2 - 7x - 5$ fonksiyonu için $f'(5)$ değeri kaçtır?

- A) 10 B) 3 C) -1 D) -3 E) -5

8. $f(x) = x^8 + x^7 + 4x^4 - 5x + 4$ fonksiyonunun 9. dereceden türevi kaçtır?

- A) 0 B) $\frac{1}{8}$ C) 1 D) 4 E) 120

9. $\begin{cases} x = t^3 + 2t - 3 \\ y = t^2 - 3t + 1 \end{cases}$ Parametrik denklemleri ile verilen fonksiyonun $t = 1$ için türevi kaçtır?

- A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{5}$ C) 1 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

10. $f(x) = \lfloor 2x + 7 \rfloor + 3x + 4$ fonksiyonunun $x = \frac{5}{2}$ noktasındaki türevi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -3 B) -1 C) 1
 D) 3 E) yoktur

11. $\frac{d}{dx}(\ln(\sin x))$ aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $-\tan x$ B) $-\cot x$ C) $\tan x$
 D) $\cot x$ E) $\cos x$

12. $\frac{d^2}{dx^2}(\cos^2 2x)$ aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $2 \cdot \sin 4x$ B) $4 \cdot \cos 4x$ C) $8 \cdot \cos 4x$
 D) $-8 \cdot \cos 4x$ E) $-4 \cdot \sin 4x$

13. $e^{-x} \frac{d^2}{dx^2}(x^2 \cdot e^x)$ ifadesinin en sade şekli hangisidir?
- A) $x^2 - x + 5$ B) $x^2 + 2x - 3$ C) $x + 3$
 D) $x^2 + 4x + 2$ E) $x^2 + 3x - 2$

14. $f(x) = |x^2 - 9| - x^3$ olduğuna göre $f'(1)$ değeri kaçtır?
- A) -5 B) -4 C) -3 D) 2 E) 4

15. $f(x) = 2^{\sin x}$ ise $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $\cos x \cdot 2^{\sin x}$ B) $\cos x \cdot 2^{\sin x} \cdot \ln 2$
 C) $\sin x \cdot 2^{\sin x}$ D) $\sin x \cdot 2^{\sin x - 1}$
 E) $2^{\cos x}$

16. $f: R - \{0\} \rightarrow R$, $f(x) = \frac{1}{x}$ olduğuna göre $(f'0f')(2)$ değeri kaçtır?
- A) -16 B) -12 C) -4 D) 12 E) 16

17. $f(x) = x^2 \cdot \text{sgn}(x^2 - 1)$ ise $f'(2)$ değeri kaçtır?
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

18. $f(x) = \sin^3 x^2$ ise $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $6x \cdot \cos^3 x^2$ B) $6x \sin^2 x^2 \cdot \cos x^2$
 C) $6x \sin^2 x^2$ D) $3x \sin^2 x^2 \cdot \cos x$
 E) $6x \cos^2 x^2 \cdot \sin x^2$

19. $f(x) = \frac{x^2}{[\lfloor x \rfloor]}$ ise $f'\left(\frac{5}{2}\right)$ değeri kaçtır?
- A) $\frac{3}{2}$ B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) 4 E) 5

20. $f(x) = \ln(x + e^x)$ ise $f'(1)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?
- A) e^2 B) 1 C) $\frac{1}{e}$ D) $\frac{1}{e^2}$ E) $\frac{e+1}{e}$

1-D	2-B	3-E	4-E	5-B	6-B	7-C	8-A	9-B	10-E
11-D	12-D	13-D	14-A	15-B	16-A	17-D	18-B	19-C	20-B

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 2}$ ifadesinin değeri kaçtır?
 A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{2x^2 - 3x + 1}$ ifadesinin değeri kaçtır?
 A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$ ifadesinin değeri kaçtır?
 A) $\frac{1}{48}$ B) $\frac{1}{32}$ C) $\frac{1}{24}$ D) $\frac{1}{8}$ E) 2

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{\sqrt{x} - 1}$ ifadesinin değeri kaçtır?
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{12} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$ ifadesinin değeri kaçtır?
 A) 36 B) 32 C) 24 D) 18 E) 12

6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - ax^2 + 4}{x^2 + 2x - 8}$ ifadesi reel bir sayı ise bu değer kaçtır?
 A) -2 B) -1 C) 0 D) 2 E) 8

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{3x}$ ifadesinin değeri kaçtır?
 A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x^2 - 1}$ ifadesinin değeri kaçtır?
 A) $-\frac{\pi}{2}$ B) 0 C) 1 D) $\frac{\pi}{2}$ E) π

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sin 2x}$ ifadesinin değeri kaçtır?
 A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x^2 + \tan 3x}$ ifadesinin değeri kaçtır?
 A) -1 B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 3

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x + \sin x}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 3

12. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin 2x - \sin 2a}{x - a}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2\cos 2a$ B) $\sin 2a$ C) $-\cos a$
D) $-\sin a$ E) 0

13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) e E) ∞

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\tan 5x)}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) $\frac{5}{2}$ D) 2 E) ∞

15. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{x - \frac{\pi}{2}}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

16. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln 2 - \ln x}{e^{x-2} - 1}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $-\frac{1}{2}$ B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

17. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\tan(x^2 - 4)}{x^3 - 8}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{12}$

18. $\lim_{x \rightarrow 0} 5x \cdot \cot 3x$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{10}{3}$

19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)}{x^2 - 1}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $-\frac{1}{2}$ B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{2\sin \pi x}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 4π B) 2π C) $\frac{1}{2\pi}$ D) $\frac{1}{4\pi}$ E) $\frac{1}{8\pi}$

1-E	2-D	3-B	4-D	5-A	6-C	7-B	8-A	9-D	10-D
11-C	12-A	13-C	14-B	15-C	16-A	17-B	18-D	19-D	20-E

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 5$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?
- A) 4 B) 6 C) 8 D) 12 E) 16
2. $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+1}$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki normalinin eğimi kaçtır?
- A) $\frac{7}{2}$ B) -2 C) -3 D) $-\frac{15}{2}$ E) $-\frac{25}{2}$
3. $f(x) = x^2 + 3x - 8$ parabolünün $x = 2$ noktasındaki teğet denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $y = 2x - 3$ B) $y = 3x - 1$
 C) $y = 7x - 12$ D) $y = -7x + 14$
 E) $y = \frac{1}{7}x - 10$
4. $f(x) = x^3 + 2x - 1$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki teğet denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $5x + y - 8 = 0$ B) $5x - y - 3 = 0$
 C) $x - 5y - 12 = 0$ D) $2x - y - 12 = 0$
 E) $x + 3y - 8 = 0$
5. $y^2 = 4x$ parabolünün $y = 6$ noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?
- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 6
6. $f(x) = \frac{2x-1}{3x+1}$ fonksiyonunun $x = -1$ noktasındaki teğet denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $3x - y + 4 = 0$ B) $4x + 5y + 10 = 0$
 C) $2x - 3y - 7 = 0$ D) $5x + y - 8 = 0$
 E) $5x - 4y + 11 = 0$
7. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x + 4y - 2xy - 6$ bağıntısının $(1,2)$ noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?
- A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{7}{4}$
8. $f(x) = x^2 + ax + 2$ parabolünün $x = 3$ noktasındaki teğetinin eğimi 10 ise a kaçtır?
- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 8
9. $f(x) = x^3 + ax^2 - x + 1$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki teğeti $2x + y + 3 = 0$ doğrusuna paralel ise a kaçtır?
- A) -2 B) 1 C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3
10. $f(x) = \sin^2 2x$ fonksiyonu $x = \frac{\pi}{8}$ noktasındaki normalinin eğimi kaçtır?
- A) -2 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

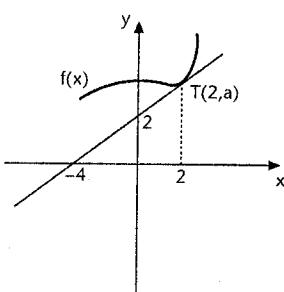
11. $y = x^3 + ax + b$ eğrisinin $y = x - 3$ doğrusuna $x = -1$ noktasında teğet olması için b kaç olmalıdır?

- A) 3 B) 2 C) -2 D) -4 E) -5

12. $f(x) = x^3 - 2nx + m$ eğrisi $x = 1$ noktasında ox eksenine teğet ise m kaç olmalıdır?

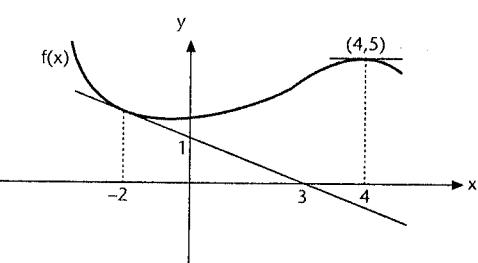
- A) -1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

13. Şekildeki grafikte $f(x)$ in $x = 2$ noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?



- A) -2 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 2

14.



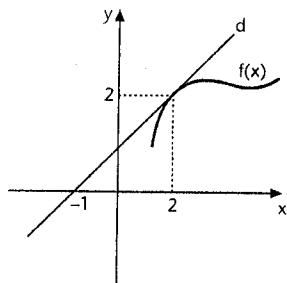
$f(x)$ fonksiyonu için $f'(-2) + f'(4)$ toplamı kaçtır?

- A) $-\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) 3 D) $\frac{11}{3}$ E) 8

15. $f(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki teğeti d doğrudur.

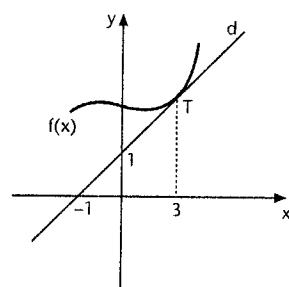
$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ ise}$$

$g'(2)$ kaçtır?



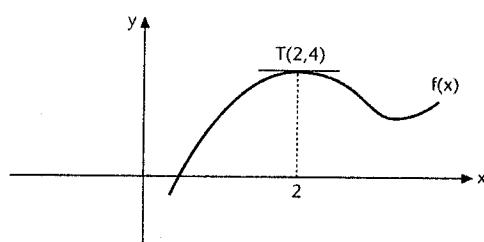
- A) 4 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $-\frac{1}{6}$ E) -2

16. $f(x)$ fonksiyonu $x = 3$ noktasında d doğrusuna teğettir. $g(x) = x^2 \cdot f(x)$ ise $g'(3)$ kaçtır?



- A) 15 B) 18 C) 24 D) 27 E) 33

17.



$f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$$g(x) = \frac{x \cdot f(x)}{x+1} \text{ ise } g'(2) \text{ değeri kaçtır?}$$

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{3}{2}$

1-C	2-B	3-C	4-B	5-A	6-E	7-B	8-C	9-A	10-B
11-E	12-C	13-D	14-A	15-D	16-E	17-B			

1. $f(x) = x^2 - 8x + 12$ fonksiyonunun en küçük değeri kaçtır?

- A) -6 B) -4 C) 4 D) 8 E) 16

2. $f(x) = -x^2 + 6x - 15$ fonksiyonunun en büyük değeri kaçtır?

- A) 6 B) 4 C) 2 D) -4 E) -6

3. $f(x) = x^3 - ax^2 + 5x + 3$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında ekstremum değeri varsa a kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 2 D) 4 E) 8

4. $f(x) = ax^2 + (a - 2)x + a + 3$ fonksiyonunun $x = -1$ de bir maksimum noktası varsa a kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) 1 D) 2 E) 4

5. $f(x) = x^3 + ax^2 - b + 12$ fonksiyonunun A(3, 1) noktasında yerel minimumu varsa b kaçtır?

- A) $-\frac{15}{2}$ B) $-\frac{7}{2}$ C) $-\frac{5}{2}$ D) 16 E) 18

6. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 4$ fonksiyonunun maksimum noktasının apsisi kaçtır?

- A) -6 B) -4 C) -2 D) 2 E) 4

7. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + ax + 6$ fonksiyonunun $x = -1$ de yerel maksimum değeri varsa bu değer kaçtır?

- A) 12 B) 15 C) 17 D) 24 E) 36

8. $f(x) = ax^2 + bx - 7$ eğrisinin $x = -1$ için maksimum değeri 2 ise a + b toplamı kaçtır?

- A) -36 B) -27 C) -18 D) -12 E) 6

9. $f(x) = x^3 + (a - 1)x^2 + 6x - 7$ fonksiyonunun dönüm noktasının apsisi $x = 1$ ise a kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 4

10. $f(x) = x^3 - 12x^2 + 5x - 8$ fonksiyonunun dönüm noktasının apsisi kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

11. $f: [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 4$ fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $[-8, 4]$ B) $[-8, 20]$ C) $[-5, 12]$
 D) $[-8, 4]$ E) $[-5, 4]$

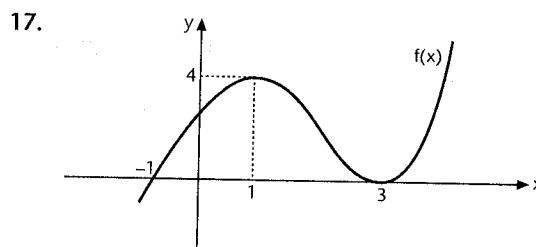
12. $f(x) = x^2 + mx + n - 2$ fonksiyonunun $x = 2$ için en küçük değeri 4 ise $m + n$ toplamı kaçtır?
- A) -2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

13. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 8$ fonksiyonunun azalan olduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $(-3, 1)$ B) $(1, 3)$ C) $(-2, 1)$
 D) $(-3, 2)$ E) $(2, 3)$

14. $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 36x + 18$ fonksiyonunun artan olduğu aralıklardan biri aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $(-\infty, 4)$ B) $(-\infty, 0)$ C) $(-3, 4)$
 D) $(2, \infty)$ E) $(4, \infty)$

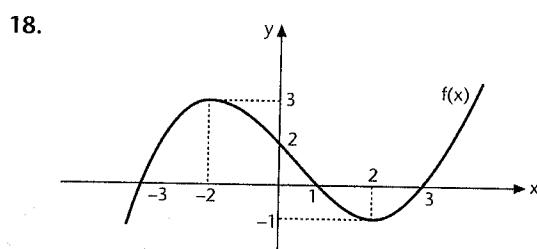
15. $f(x) = x^3 - 6x^2 + (m-1)x + 4$ fonksiyonu daima artan olduğuna göre m aşağıdakilerden hangisini sağlamalıdır?
- A) $m > 9$ B) $m > 13$ C) $m < 8$
 D) $m < 9$ E) $m > 7$

16. $f(x) = \frac{2x-m}{x-3}$ fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıkta azalan olması için m aşağıdakilerden hangisini sağlamalıdır?
- A) $m < 8$ B) $m < 6$ C) $m > -3$
 D) $m > -8$ E) $m > 2$



Şekilde $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Aşağıdakilerden hangisi yanlışır?

- A) $f'(0) > 0$ B) $f'(1) = 0$ C) $f'(2) > 0$
 D) $f'(3) = 0$ E) $f(4) > 0$

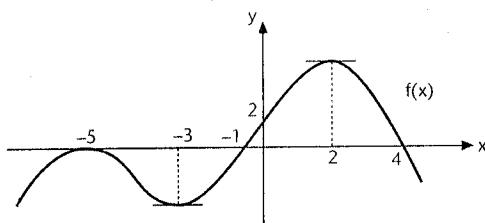


$f(x)$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlışır?

- A) $x = -2$ de maksimum var
 B) $x = 2$ de minimum var
 C) $f(0) = 2$
 D) $f'(-4) < 0$
 E) $f'(3) > 0$

1-B	2-E	3-D	4-B	5-C	6-A	7-C	8-B	9-A	10-C
11-E	12-C	13-C	14-E	15-B	16-B	17-C	18-D		

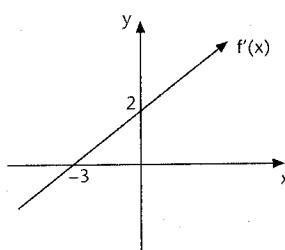
1.



Grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

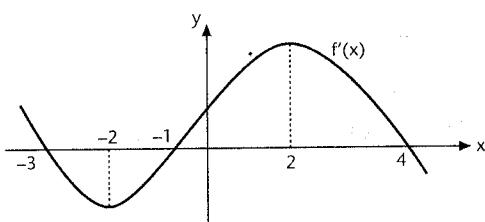
- A) $f''(2) > 0$ B) $f'(-1) > 0$ C) $f'(-3) = 0$
 D) $f''(-4) < 0$ E) $f'(-5) = f'(2)$

2. Şekilde türevinin grafiği verilen f fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?



- A) $x = -3$ de min var B) $f'(0) > 0$
 C) $f''(x) < 0$ D) $f'(-4) < 0$
 E) $f'(-3) = 0$

3.



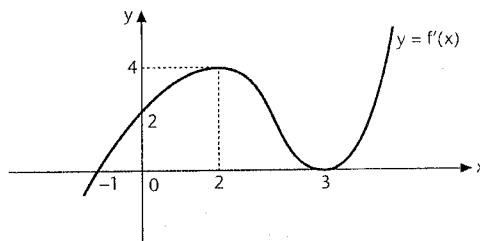
Şekilde $f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $x = -3$ de max var
 B) $x = -1$ de min var
 C) $(-2, -1)$ aralığında fonksiyon azalan.
 D) $f'(0) < 0$
 E) $f'(8) < 0$

4. Toplamları 12 ve çarpımları maksimum olan iki sayının çarpımı kaçtır?

- A) $2\sqrt{7}$ B) $4\sqrt{2}$ C) 36 D) 48 E) $6\sqrt{2}$

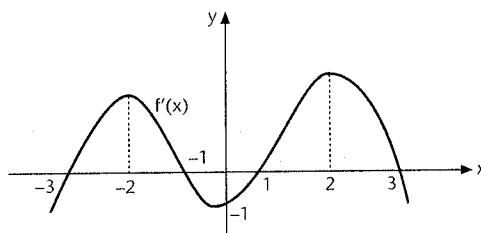
5.



Türevinin grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $x = -1$ max var
 B) $x = 3$ min var
 C) $x = 2$ döndüm noktası
 D) $f'(-2) > 0$
 E) $(-2, 3)$ aralığında fonksiyon artan

6.



f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $x = -1$ de max. noktası var
 B) $x = -3$ de min. var
 C) $x = 2$ de max. var
 D) $(1, 2)$ aralığında fonksiyon artan
 E) $[3, \infty)$ aralığında fonksiyon azalan

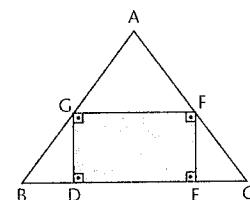
7. ABC üçgeninde

$$|BC| = 12 \text{ ve } h_a = 8$$

br ise (DEFG) dik-

dörtgenin alanı en

fazla kaç br^2 olur?

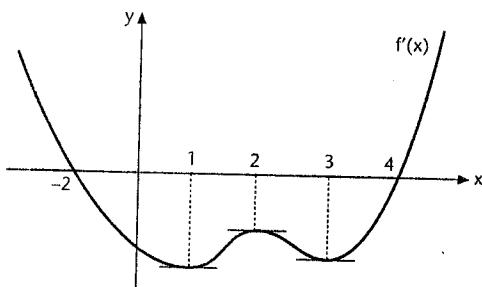


- A) 24 B) 30 C) 36 D) 42 E) 48

8. Yarıçapı 6 br olan çemberin içine çizilen maksimum alanlı üçgenin alanı kaç br^2 dir?

- A) $12\sqrt{3}$ B) $14\sqrt{3}$ C) $15\sqrt{3}$ D) $16\sqrt{3}$ E) $27\sqrt{3}$

9.



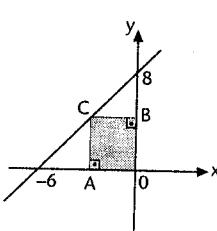
Türevinin grafiği verilen f fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $x = -2$ de max. var.
- B) $x = 1$ de dönüm noktası var.
- C) $x = 2$ de max. var.
- D) $x = 3$ de dönüm noktası var.
- E) $x = 4$ de minimum var.

10. Çevresi 40 br olan bir dikdörtgenin alanı en fazla kaç br^2 olur?

- A) 80 B) 100 C) 120 D) 200 E) 400

11. Şekilde verilenlere göre taralı dikdörtgenin alanı en fazla kaç br^2 dir?



- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 16

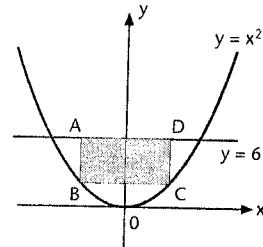
12. Hipotenüsü 8 cm olan bir dik üçgenin alanı en fazla kaç br^2 dir?

- A) 12 B) 16 C) 18 D) 20 E) 24

13. Çarpımları 72 olan pozitif iki sayının toplamı en az kaçtır?

- A) 12 B) 15 C) 17 D) $12\sqrt{2}$ E) $16\sqrt{2}$

14. $f(x) = x^2$ fonksiyonu ve $y = 6$ doğrusu arasında çizilen ABCD dikdörtgeninin alanı en fazla olduğuna göre alanı kaç br^2 dir?



- A) $8\sqrt{2}$ B) 24 C) $16\sqrt{2}$ D) 32 E) 36

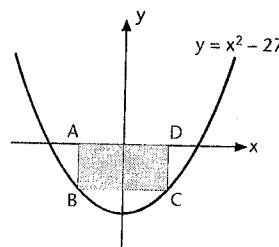
15. Çapı 12 br olan bir çember içine çizilen en büyük alanlı bir dikdörtgenin alanı en fazla kaç br^2 dir?

- A) 48 B) 56 C) 60 D) 64 E) 72

16. $x^2 - (a-1)x - 8 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $(x_1^2 + x_2^2)$ toplamının minimum olması için a kaç olmalıdır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

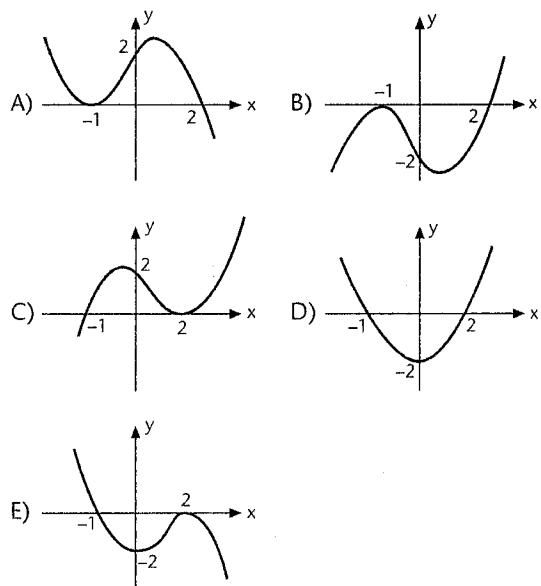
17. $f(x) = x^2 - 27$ parabolü içine ABCD dikdörtgeni çizilmiştir. Dikdörtgenin alanı maksimum ise çevresi kaç br dir?



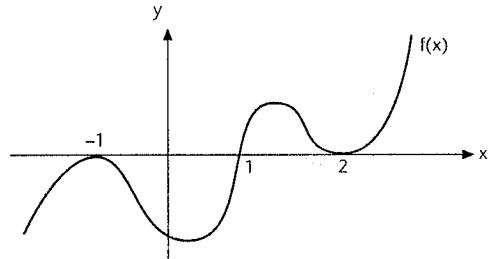
- A) 36 B) 42 C) 48 D) 64 E) 72

1-A	2-C	3-D	4-C	5-C	6-C	7-A	8-E	9-C	10-B
11-D	12-B	13-D	14-A	15-E	16-D	17-C			

1. $f(x) = (x - 2)(x + 1)^2$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



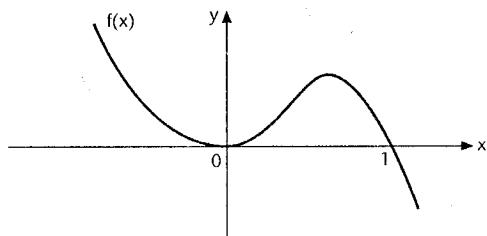
2.



Şekilde $f(x) = (x^2 - 1)(x - 2)(x^2 + bx + c)$ fonksiyonunun grafiği verildiğine göre $b + c$ toplamı kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) 1 D) 2 E) 3

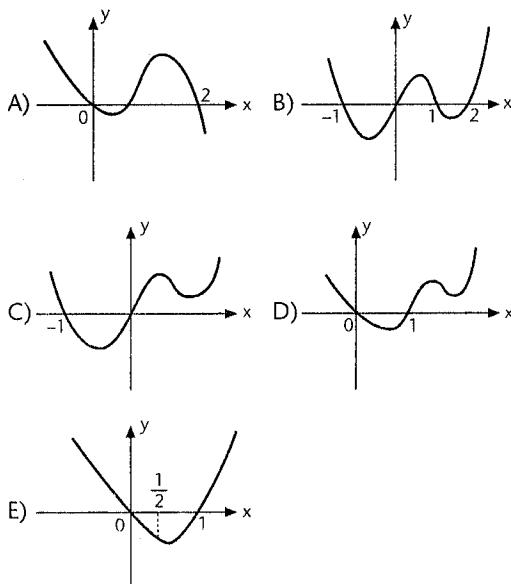
3.



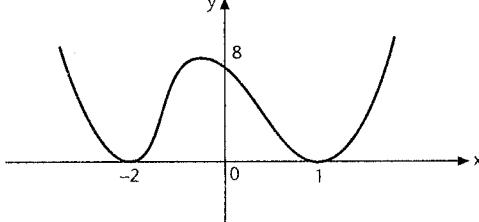
Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = x \cdot (x - 1)^2$ B) $y = x(1 - x)$
 C) $y = x^2(1 - x)$ D) $y = x^2(x - 1)^2$
 E) $y = x^3(x - 1)$

4. $f(x) = x^4 - x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



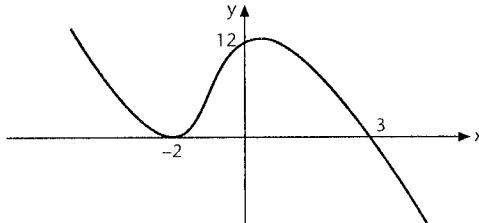
5.



Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $f(x) = (x - 2)^2(x + 1)^2$
 B) $f(x) = 2 \cdot (x + 2)^2(x - 1)^2$
 C) $f(x) = 2(x - 1)(x + 2)^2$
 D) $f(x) = 4(x - 1)^2(x + 2)$
 E) $f(x) = (x + 2)(x - 1)$

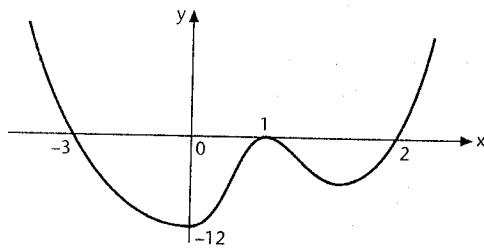
6.



Şekilde $f(x) = -x^3 + bx^2 + cx + d$ fonksiyonu için $b + c + d$ toplamı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 3 D) 12 E) 19

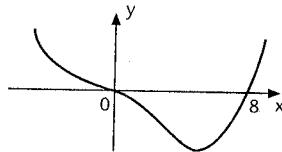
7.



Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

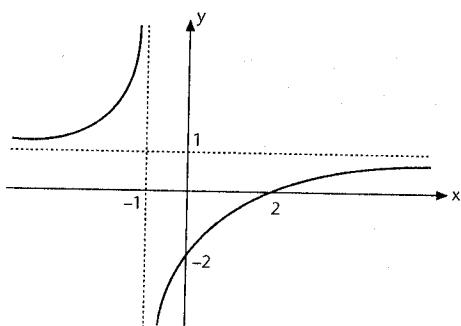
- A) $y = (x - 1)^2(x + 12)$
- B) $y = (x + 3)(x - 1)(2x - 4)$
- C) $y = (x - 1)^2(x - 3)(x - 2)$
- D) $y = (x + 3)(x - 1)^2(2x - 4)$
- E) $y = (x + 3)(x - 1)(2x + 4)$

8. Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisi olabilir?



- A) $y = x(x - 8)$
- B) $y = x^2(8 - x)$
- C) $y = x^3(8 - x)$
- D) $y = x^2(x - 8)$
- E) $y = x^3(x - 8)$

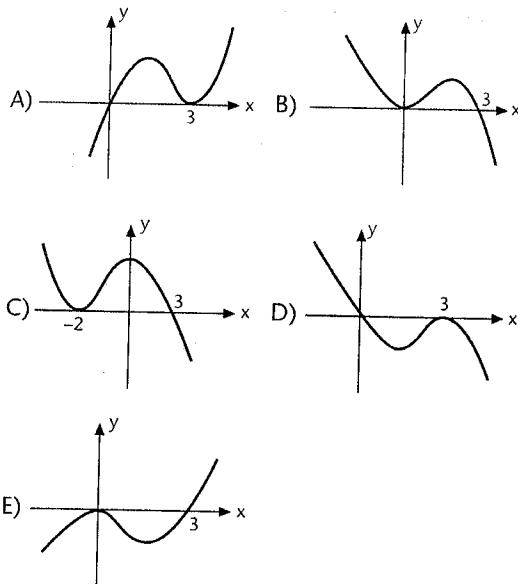
9.



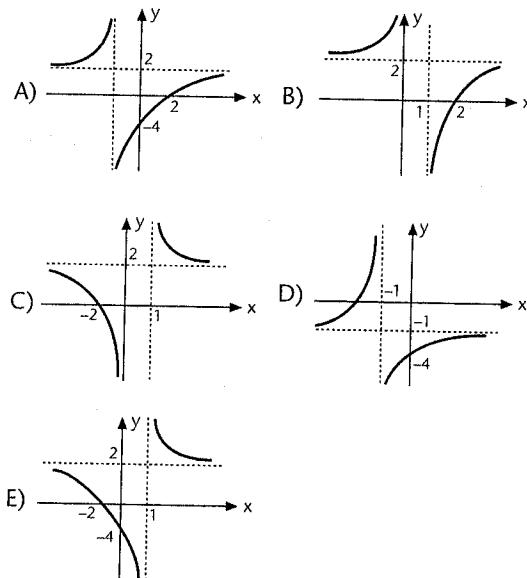
Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = \frac{x - 2}{x - 1}$
- B) $y = \frac{x - 1}{x + 2}$
- C) $y = \frac{x - 2}{x + 1}$
- D) $y = \frac{4x - 4}{x + 1}$
- E) $y = \frac{x - 2}{2x + 2}$

10. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

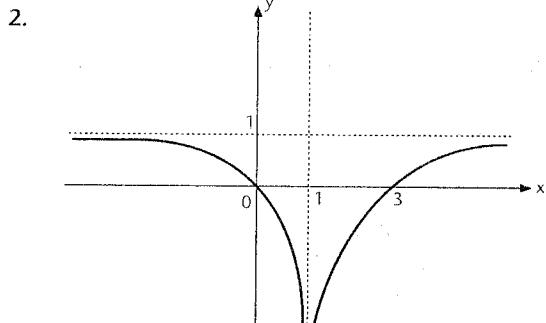
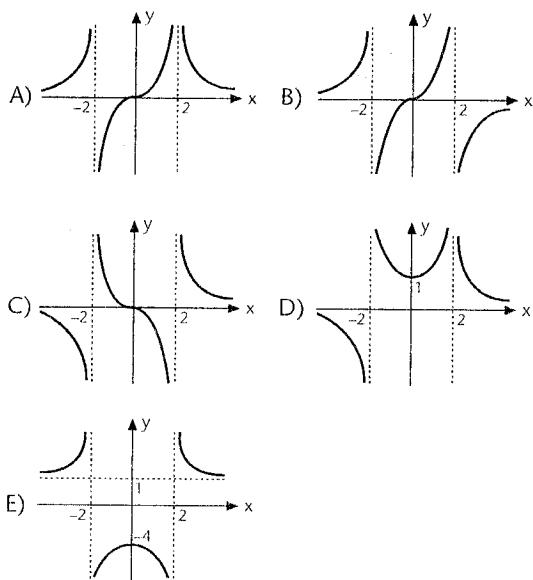


11. $y = \frac{2x + 4}{x - 1}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



1-B	2-A	3-C	4-E	5-B	6-E	7-D
8-E	9-C	10-A	11-E			

1. $y = \frac{2x}{x^2 - 4}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

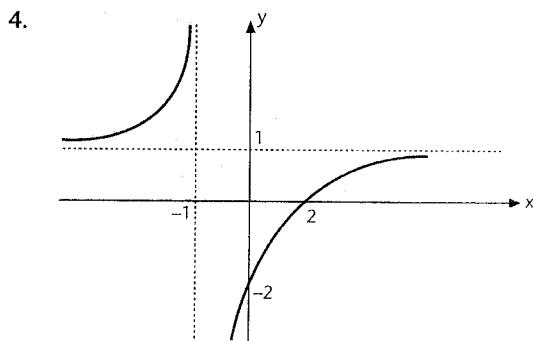


Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = \frac{x^2 + 3x}{(x - 1)^2}$ B) $y = \frac{x(x - 3)}{x - 1}$
 C) $y = \frac{x^2 - 3x}{(x - 1)^2}$ D) $y = \frac{x(x + 3)}{x + 1}$
 E) $y = \frac{x^2 - 3x}{(x + 1)^2}$

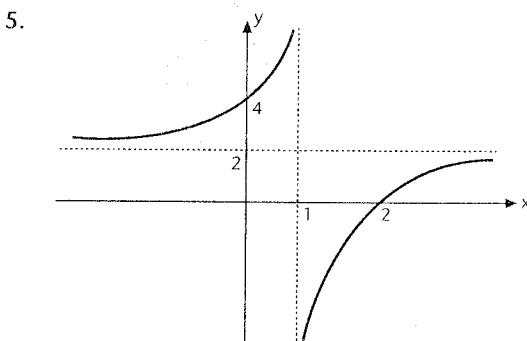
3. $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 2}$ fonksiyonunun asimtotlarının kesim noktasının koordinatları toplamı kaçtır?

- A) -10 B) -9 C) -6 D) 4 E) 6



Grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = \frac{x - 2}{x - 1}$ B) $y = \frac{x + 2}{x + 1}$ C) $y = \frac{x - 1}{x + 1}$
 D) $y = \frac{x - 2}{x + 1}$ E) $y = \frac{x - 1}{x + 2}$



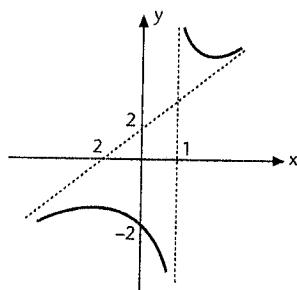
Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = \frac{2x - 4}{x - 1}$ B) $y = \frac{2x - 4}{x + 1}$ C) $y = \frac{4x - 2}{2x - 2}$
 D) $y = \frac{2x + 4}{x - 1}$ E) $y = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$

6. $y = \frac{3x - 2}{x + 1}$ fonksiyonunun asimtotlarının kesim noktası aşağıdakilerden hangisidir?

- A) (3, 1) B) (3, -1) C) (-1, 3)
 D) (-1, -3) E) (-1, 2)

7. Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?



A) $y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$

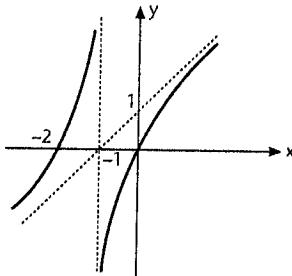
B) $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$

C) $y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$

D) $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 1}$

E) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$

8. Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?



A) $y = \frac{x - 2}{x + 1}$

B) $y = \frac{x(x - 2)}{x + 1}$

C) $y = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$

D) $y = \frac{x(x + 2)}{x + 1}$

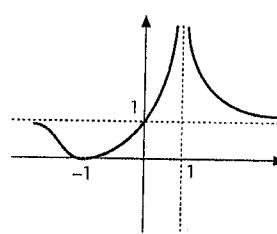
E) $y = \frac{x(x + 2)}{(x + 1)^2}$

9. $y = \frac{ax + b}{cx + 3}$ fonksiyonunun asimtotlarının kesim

noktası $(3, 2)$ ise $\frac{c}{a}$ değeri kaçtır?

A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) -2

10. Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?



A) $y = \frac{x^2 - 1}{(x - 1)^2}$

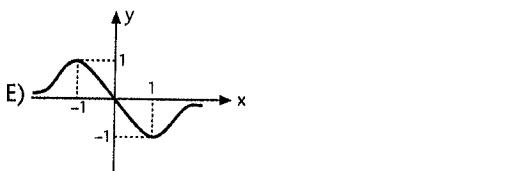
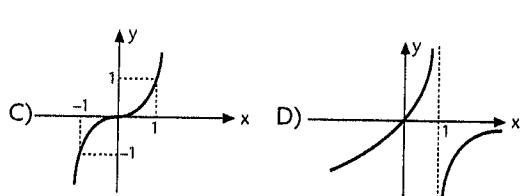
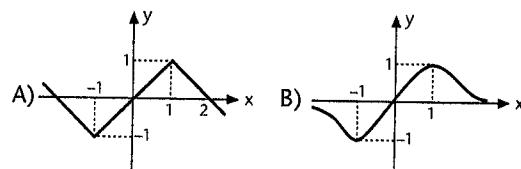
B) $y = \frac{x + 1}{x - 1}$

C) $y = \frac{x + 1}{(x - 1)^2}$

D) $y = \frac{(x + 1)^2}{(x - 1)^2}$

E) $y = \frac{(x + 1)(x^2 + 1)}{(x - 1)^2}$

11. $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



1-C	2-C	3-B	4-D	5-A	6-C	7-C
8-D	9-C	10-D	11-B			

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 5$ fonksiyonu için
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ değeri kaçtır?
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

2. $f(2x-1) = 2x^3 - 4x^2 + 6x + 7$ fonksiyonu için $f'(3)$ değeri kaçtır?
- A) 4 B) 5 C) 7 D) 9 E) 12

3. $f(x) = \cos \frac{3\pi x}{4} + \sin \frac{\pi x}{3}$ ise $f'(2)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $\frac{7\pi}{6}$ B) $\frac{5\pi}{6}$ C) $\frac{3\pi}{4}$ D) $\frac{7\pi}{12}$ E) $\frac{5\pi}{12}$

4. $f(x) = e^x \cdot \ln x$ fonksiyonu için $f'(1)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1}{e}$ B) 1 C) e D) e^2 E) $e+1$

5. $f(x) = (2x-3)^3 \cdot (3x-4)$ fonksiyonu için $f'(2)$ değeri kaçtır?

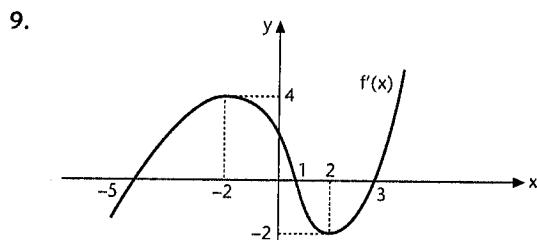
- A) -2 B) -1 C) 3 D) 9 E) 15

6. $x^2 - y^3 + 3(x+y) - 4x + 2 = 0$ fonksiyonunun A(1, 2) noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?
- A) $-\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{5}{9}$ E) $\frac{4}{3}$

7. $f(x) = x^3 - (m-1)x^2 - 8x + 2$ fonksiyonunun $x = -2$ noktasındaki teğeti $2x - 3y + 4 = 0$ doğrusuna paralelse m kaçtır?

- A) $-\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{4}{3}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (x^2 + x + 1)}{x^2}$ ifadesinin değeri kaçtır?
- A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) 1 D) 2 E) 3



Şekilde türevinin grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlışır?

- A) $x = -5$ de $f(x)$ in minimum noktası var.
B) $x = 1$ de $f(x)$ in maksimum noktası var.
C) f , $[-2, 2]$ aralığında azalan
D) $f''(2) = 0$ dır.
E) $f'(3) = 0$ dır.

1-A	2-C	3-D	4-C	5-E	6-B	7-C	8-A	9-C
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

1. $f(x) = \frac{2x-3}{x+2}$ fonksiyonu için $f'(1)$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{5}{9}$ C) $\frac{7}{9}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{7}{2}$

2. $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos x$ fonksiyonunun $x = \frac{3\pi}{4}$ noktasındaki türevi kaçtır?

- A) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

3. $f(x) = x \cdot \ln^2 x$ fonksiyonunun $x = e^2$ noktasındaki türevi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1 B) e C) e^2 D) 4 E) 8

4. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4}$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{20}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 2

5. $f(x) = x^3 + (m-1)x^2 + 12x - 5$ fonksiyonunun daima artan olması için m aşağıdakilerden hangisini sağlamalıdır?

- A) $m < -5$ B) $m > 7$ C) $m > 0$
D) $-5 < m < 7$ E) $-6 < m < 6$

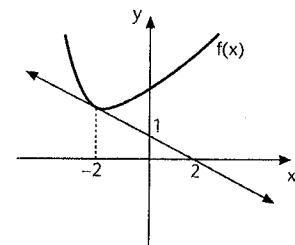
6. $f(x) = x^3 - ax^2 - 4x + 8$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasında dönüm noktası olması için a kaç olmalıdır?

- A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

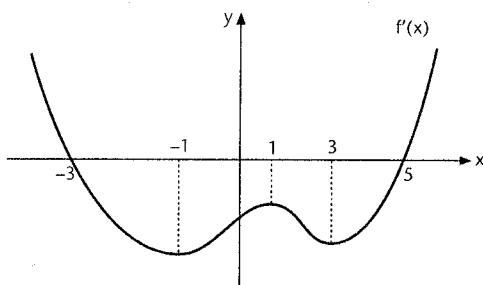
7. Şekilde $f(x)$ fonksiyonu ve $x = -2$ noktasındaki teğeti verilmiştir.

$g(x) = x^2$. $f(x)$ fonksiyonu için $g'(-2)$ değeri kaçtır?

- A) 10 B) 6 C) 4 D) -6 E) -10



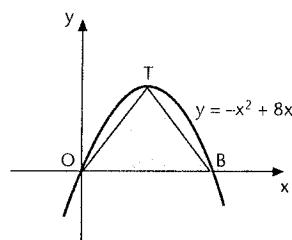
8.



Şekilde $f(x)$ in türevinin grafiği verilmiştir. Hangi x değeri için $f(x)$ maksimum değer alır?

- A) -3 B) -1 C) 1 D) 3 E) 5

9. Şekilde $y = -x^2 + 8x$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. OTB taraklı üçgenin alanı en fazla kaç br² dir?



- A) 32 B) 48 C) 64 D) 72 E) 96

10. $f(x) = \frac{2x-5}{x+1}$ fonksiyonunun asimtotlarının kesim noktasının koordinatları toplamı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

1-C	2-B	3-E	4-A	5-D	6-D	7-E	8-A	9-C	10-D
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------